# باب-9 الجبرائی عبارت (Algebraic Expression)

## 9.1 تمہید

$2ab - 3, 8x^2, 3z, x + 2, 2y - 3$ وغیرہ سہل الجبرائی عبارتوں کی مثالیں ہیں۔ یہ عبارتیں متغیر (Variavle) اور غیر متغیر (Constant) سے بنے ہیں۔ جیسے عبارت $2a - 3$ کو $2a$ میں 3 گھٹا کر بنایا گیا ہے۔

اس عبارت میں دو رکن (Term) $2a$ اور 3 ہیں واضح طور پر $a$ کا مضروب (Co-efticient) 2 ہے۔ آئے نیچے دیئے گئے جدول کو پورا کریں۔

| عبارت | متغیر | رکن | ارکان کی تعداد | متغیر کے مضروب |
|---|---|---|---|---|
| $x + 3$ | x | x, 3 | دو رکنی | x کا مضروب = 1 |
| $2y$ | | | | |
| $5 - 2z$ | | | | |
| $5x + y$ | | | | |
| $t^2 + 2t + 3$ | | | | |

جیسا کہ آپ نے اوپر دیئے گئے جدول میں دیکھا کہ ارکان کو جوڑ کر یا گھٹا کر الگ الگ رکن سے عبارت بنائی جا سکتی ہے۔ رکن خود بھی مضروبوں کے حاصل ضرب کی شکل میں بنائے جا سکتے ہیں۔ جیسے عبارت $2a - 3$ میں رکن $2a$ کو $2 \times a$ مضروبوں 2 اور $a$ کے حاصل ضرب کی شکل میں رکھا جا سکتا ہے۔ رُکن 3 صرف ایک جُزِ ضربی 3 سے بنا ہے۔ (یہاں ہم 1 کو نہیں لیتے کیونکہ وہ سبھی اعداد کا مشترک جُزِ ضربی ہے۔)

> کسی رُکن کا عددی جُزِ ضربی (Numeral Co-efficient) اس کا عددی مضروب کہلاتا ہے۔

اب ذرا $2x^2y$ اور $5yx^2$ کے اجزائے ضربی کیجئے۔ کیا آپکو ان میں الجبرائی اجزائے ضربی ایک جیسے ملتے ہیں۔

$2 \times x \times x \times y$ اور $5 \times y \times x \times x$ میں الجبرائی اجزائے ضربی ایک جیسے ہیں۔اس لئے یہ یکساں رکن (Like Terms) ہیں۔ایسے سبھی رکن جن میں الجبرائی حصہ ایک جیسا ہوتا ہے۔یکساں رکن کہلاتے ہیں۔

**خود کر کے دیکھئے۔**

مندرجہ ذیل میں یکساں رکنوں کو پہچانئے اور لکھئے۔

1. $-3x, 3x$
2. $2xy, -3yx$
3. $x^2y, 6x^2y$
4. $x^2y, xy^2$
5. $xy, x^2y^2$
6. $\frac{x}{3}, 2x$
7. $\frac{1}{x}, 2x$

## الجبرائی عبارتوں کا جمع اور تفریق (Addition and Substraction of Algebaic expression)

ہم نے الجبرائی عبارتوں کے ریاضی اعمال (Mathematical Operations) کی مشق پچھلے درجوں میں بھی کی ہے۔آیئے دو عبارتوں کو ایک ساتھ لکھ کر جوڑتے ہیں۔جیسے

(i) $2x$ اور $3x$ کو جوڑیئے۔

حل: $2x + 3x = (2 + 3)x$ ( کیونکہ رکن یکساں ہیں اسلئے مضروب جڑ جائینگے)

$= 5x$

(ii) $2x$ اور $3y$ کو جوڑیئے۔

حل: $2x + 3y$ ( کیونکہ رکن یکساں نہیں ہیں۔اسلئے دونوں رکنوں کو جوڑا نہیں جاسکتا)

(iii) $x^2 + 2x + 3$ اور $2x + 5$ کو جوڑیئے۔

$(x^2 + 2x + 3) + (2x + 5) = x^2 + 2x + 2x + 3 + 5$ (دوبارہ منظم کرنے پر)

$= x^2 + (2 + 2)x + 8$

$= x^2 + 4x + 8$

اسی طرح عبارتوں کو گھٹانے میں ہم دیکھتے ہیں کہ گھٹانے کا عمل حقیقت میں دوجمعی معکوس (Additive Inverse) جوڑنے کے عمل کے برابر ہے۔گھٹانیکے عمل میں بھی یکساں رکنوں کی پہچان کرتے ہیں۔جیسے۔

(i) $5x$ میں سے $2x$ گھٹائیے۔

حل: $5x - 2x = 5x + (-2x)$

$= [5 + (-2)]x$

$= (5 - 2)x$

$= 3x$

(ii) $5x$ میں سے $7x$ گھٹائیے۔

حل: $5x - 7x$

$= (5 - 7)x$

$= -2x$

(iii) $4xy$ میں سے $3x^2y$ گھٹائیے۔

حل: کیونکہ یہاں رکن یکساں نہیں ہیں۔ اس لئے ضربی اعداد کو جوڑا۔ گھٹایا نہیں جاسکتا ہے۔

$= 4xy - 3x^2y$

## مشق 9.1

1. جوڑیے۔

(a) $xy, 3xy$ (b) $x^2 + 3x, 2x + 9$ (c) $x^2, y^2$

(d) $7x, 8x$ (e) $8a, -2a, 7a, 2b$ (f) $8x, -2x, -6x$

(g) $2.3x, 1.7x$ (h) $\frac{2}{3}x, \frac{1}{3}x, -x$

2. پہلی عبارت میں سے دوسری کو گھٹائیے۔

(a) $22x, 10$ (b) $17xy, 19xy$ (c) $a^2+1, -2a$

(d) $8x, -8x$ (e) $7xy, 7xy$ (f) $7.3x. 1.3x$

(g) $-6x + y + 4z - 8, -2y + x - 5z + 8$ (h) $\frac{x}{2} - \frac{x}{4}, \frac{x}{3}$

3. سہل کیجئے۔

(a) $2x - 3y - 7x + 2x - y + 2$

(b) $5y^2 - 3y + 2y^2 - 1 + 2y^2 + 6y - 5$

(c) $6a - 3b + c - 6a + 3b \ 7c$

(d) $8x^2 + 5xy + 3y^2 + 3x^2 + 2xy - 6y^2$

4. اگر کسی مثلث کے اضلاع $x + 3$ $x + 2, x + 1$ ہیں تو اس کا احاطہ کیا ہوگا؟

5. اگر کسی مربع کا ایک ضلع $7 - x$ ہے تو اُس کا احاطہ معلوم کیجئے۔

6. رحیم کی عمر 6 - x سال اور مہیش کے عمر Y سال ہے، دونوں کے عمروں کا جوڑ اور فرق کیا ہوگا۔

## 9.3 کثیر رکنی (Polynomial)

ہم نے مختلف عبارتوں کے بارے میں سیکھا۔ ہم نے یہ بھی جانا کہ عبارت میں رُکن (Term) ہوتے ہیں اور عبارت کی اپنی ڈگری بھی ہوتی ہے۔ عبارت کے رُکن کی تعداد اور ڈگری کچھ بھی ہوسکتی ہے۔ لیکن کثیر رکن خاص شرط والے عبارت ہوتے ہیں اگر کسی عبارت میں رُکن کی تعداد متعین ہو اور سبھی رُکن کی ڈگری ایک مکمل عدد (Whole number) تو وہ عبارت کثیر رکنی (Polynomial) کہلاتا ہے۔

کثیر رکنی میں رُکنوں کی تعداد ایک یا ایک سے زیادہ کچھ بھی ہوسکتی ہے۔ لیکن وہ متعین ہوتی ہے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ ہر کثیر رکنی ایک عبارت ہے لیکن ہر عبارت کثیر رکنی نہیں ہے۔ جیسے $2x^2 + 9x - 17$ ایک کثیر رُکنی ہے اور عبارت بھی ہے مگر $\frac{1}{2x^2+9x-17}$ ایک عبارت ہے کثیر رکنی نہیں ہے۔

**خود کر کے دیکھیے۔**

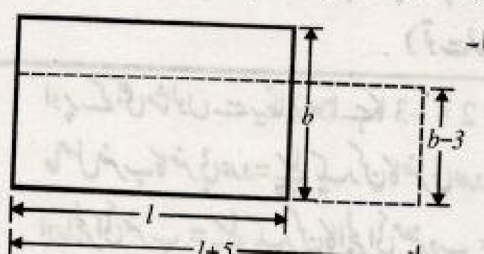
مندرجہ ذیل عبارتوں میں کثیر رکنی کو الگ کیجیے۔

$$x^2 - 9, 2x^2 - 237 + 2,\ 7x^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{3}x + y,\ \frac{1}{x^2 - y}, - 2x^2y^2,\ \frac{1}{2}\ x^2z^2$$

## 9.4 الجبرائی عبارتوں کا ضرب

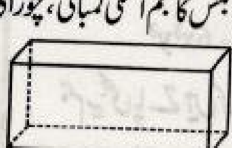
کیا آپ ایسی حالت کے بارے میں سوچ سکتے ہیں جن میں دو الجبرائی عبارتوں کو ضرب کرنا پڑتا ہو؟

(i) بلی اُٹھ کر کہتی ہے۔ ”ہم مستطیل کے رقبہ کے بارے میں سوچ سکتے ہیں۔“ مستطیل کا رقبہ $l \times b$ ہے جسمیں $l$ لمبائی اور $b$ چوڑائی ہے۔ اگر مستطیل کی لمبائی 5 اکائی بڑھا دی جائے۔ یعنی $(l + 5)$ کردی جائے اور چوڑائی 3 اکائی کم کردی جائے یعنی $(b - 3)$ کردیجائے تو مستطیل کا رقبہ $(l + 5)(b - 3)$ ہوگا۔





(ii) کیا آپ حجم (Volume) کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟ ایک مستطیل نما بکس کا حجم اُسکی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی کے حاصل ضرب سے حاصل ہوتا ہے)



(iii) سریتا کہتی ہے کہ جب ہم چیزیں خریدتے ہیں تو ہمیں ضرب کرنا پڑتا ہے۔ مثال کیلئے اگر فی درجن کیلوں کی قیمت p روپے ہے اور اسکول پکنک کیلئے z درجن کیلوں کی ضرورت ہے تو ہمیں $(p \times z)$ روپیوں کی ادائیگی کرنی ہوگی۔

مان لیجئے فی درجن کیلوں کی قیمت 2 روپے کم ہوتی ہے اور پکنک کیلئے 4 درجن کم کیلوں کی ضرورت ہوتی تو فی درجن کیلوں کی قیمت $(P - 2)$ روپے ہوتی اور $(z - 4)$ درجن کیلوں کی ضرورت ہوتی اسلئے ہمیں $(p - 2)\ (z - 4)$ روپیوں کی ادائیگی کرنی ہوتی۔ آیئے عبارتوں کے حاصل ضرب کو سمجھیں۔

### 9.4.1 دو یک رکنی (Monomial) کا حاصل ضرب سمجھیں

(i) $6 = 3 + 3 = 2 \times 3$ ہم جانتے ہیں

اسی طرح

(ii) $2x = x + x = 2 \times x$

اس طرح

(iii) $6x = 3x + 3x = 2 \times 3x$

کچھ دوسری مثالوں کے ذریعہ اسے سمجھئے۔

(iv) $2x \times y = 2 \times x \times y = 2 \times y \times x = 2xy = 2yx$

(v) $2x \times 3y = 2 \times x \times 3 \times y = 2 \times 3 \times x \times y = 6\ xy$

(vi) $2x \times x = 2 \times x \times x = 2x^2$ (قوت نما (power) کے اصول سے) $[x \times x = x^{1+1} = x^2]$

(vii) $2xy \times -3xy = 2 \times x \times x \times y \times (-3) \times x \times y \times y$

$= 2 \times (-3) \times x \times x \times x\, y \times y \times y$

$= 6(x^3y^3)$ (قوت نما کے اصول سے)

> اوپر کے سبھی مثالوں سے یہ ظاہر ہوتا ہے کا $2 \times -3 = -6$
>
> حاصل ضرب کا ضربی عدد = پہلے یک رکن کا ضربی عدد × دوسرے یک رکنی کا ضربی عدد
>
> اور الجرائی ضرب = پہلے یک رکن کا الجرائی مضروب × دوسرے رکن کا الجرائی مضروب
>
> $= x^2y \times xy^2 = x^3y^3$
>
> $2x^2y \times -3x^2y = -6x^3y^3$
>
> ہم یہ بھی پاتے ہیں کہ دو یک رکنی کا حاصل ضرب ہمیشہ یک رکنی ہی ہوتا ہے۔

### 9.4.2 تین یا اُس سے زیادہ یک رکنی کا حاصل ضرب

نیچے کچھ مثال دیئے گئے ہیں۔

(i) $3x \times -7y \times 5z = (3x \times 7y) \times 5x = 21xy \times 5z = 105\ xyz$

(ii) $2x^2y \times 3y^2z \times (-5z^2x) = (2x^2y \times 3y^2z) \times (-5z^2x)$

$= 6x^2y^3z \times (-5z^2x)$

$= -30x^3y^3z^3$

یہاں ہم نے پہلے دو یک رکنی کو ضرب کر کے ایک رکن حاصل کیا پھر اس نئے یک رکنی میں تیسرے یک رکن سے ضرب کر کے حاصل ضرب یک رکنی حاصل کیا ہے اسے مندرجہ ذیل طریقے سے بھی حل کر سکتے ہیں۔

(iii) $2x^2y \times 3y^2z \times (-5z^2x) = (2 \times 3 \times (-5)) \times x^2 \times x \times y \times y^2 \times z \times z^2$

$= -30\ x^3y^3z^3$

اس طرح تین سے زیادہ یک رکنی کا حاصل ضرب بھی ایک یک رکنی ہی حاصل ہوتا ہے۔

### سوالنامہ۔9.2

1. حاصل ضرب معلوم کیجئے

(a) $8x \times (-2)$ (b) $-3x \times -3x^2y$

(c) $6mn \times 7np$ (d) $4p^3 \times 3p^3$

(e) $x^2y \times xyz$ (f) $2.5x \times 4x$

(g) $2.5x \times 2.5y$ (h) $\frac{1}{2}x \times \frac{1}{2}y$

(i) $\frac{1}{2}xy \times 2xy$ (j) $2x \times 2x^2 \times 2x^3$

(k) $-3x^2y \times (-6) \times 7xy$

2. کسی مستطیل کے متصل اضلاع بالترتیب $6p^2q^2$ اور $2pq$ ہیں تو مستطیل کا رقبہ کیا ہوگا؟

3. اگر کسی مربع کا ضلع $\sqrt{2}x^2y^2$ ہے تو مربع کا رقبہ کیا ہوگا۔

4. کسی مثلث کا قاعدہ $7xyz$ اور متعلقہ عمود یا اونچائی $2x$ ہے تو مثلث رقبہ کیا ہوگا؟

5. مثلث متساوی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجئے اگر اُسکا ضلع $3x^2$ ہے

6. اُس مکعب (Cube) کا حجم کیا ہوگا جس کا کنارا $6a$ ہو؟

7. اگر ایک قلم کی قیمت $x^2y$ ہو تو $y^2x$ قلم کی قیمت کیا ہوگی؟

8. اگر کوئی آدمی $\frac{x^2}{2}$ کیلومیٹر فی گھنٹہ کی چال سے چل رہا ہے تو 2 گھنٹے میں وہ کتنی دوری طے کریگا۔

### 9.4.3 یک رکنی (Monomial) کا دو رکنی (Bionomial) سے ضرب

آیئے اسے سمجھنے کیلئے ایک یکرکنی $2x$ اور ایک دو رکنی $2x+y$ کو ضرب کرتے ہیں۔ چونکہ عبارت اعداد کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس لئے اعداد کے اصولوں کی پابندی عبارت بھی کرتے ہیں

ہم جانتے ہیں کہ

$$12 \times 105 = 12(100 + 5) = 12 \times 100 + 12 \times 5 = 1200 + 60 = 1260$$

(بٹن اصول (Distributive law) سے

اسی طرح

$$2x \times (2x + y) = 2x \times 2x + 2x \times y$$
$$= 4x^2 + 2xy$$

$$(3x + 7) \times (-3x^2) = (3x) \times (-3x^2) + 7 \times (-3x^2)$$
$$= -9x^3 - 21x^2$$

اسی طرح بٹن کے اصول کی مدد سے یک رکنی سے دو رکنی کے ہر ایک رکن سے ضرب کرتے ہیں۔ اور حاصل ضرب کو اُنکے نشانوں کیساتھ جمع کرتے ہیں۔۔ یک رکنی سے سہ رکنی (Trinomial) یا دوسرے کثیر رکنی عبارتوں کا حاصل ضرب معلوم کرنے کیلئے اسی بنیادی طریقہ کار کا استعمال کرتے ہیں۔ جیسے

$$7x \times (2x^2 - 3xy + 11) = 7x \times 2x^2 + 7x \times (-3xy) + 7x \times 11$$
$$= 14x^2 - 21x^2y + 77x$$

**خود کر کے دیکھئے۔**

حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

(i) $a \times (a^3 - a^2 - a + 1)$  (ii) $(a + b + c) \times 3a^2$

(iii) $2a \times (x + y + z)$  (iv) $(2a^2 + 3bc - c^2) \times 2abc$

$2x$ کو پہلے $(2y+x)$ سے ضرب کرینگے پھر y کو $(2y+x)$ سے ضرب کرکے دونوں کو جوڑ لینگے

### 9.4.4 دورکنی کا دورکنی سے ضرب

جس طرح ہم نے یک رکنی کا دورکنی سے ضرب کیا

آئے اب ہم دورکنی کا دورکنی سے ضرب کریں۔

سوچئے۔ آپ $(2x+y)(2y+x)$ کو کیسے حل کرینگے۔

آیئے سمجھیں

$$(2x+y)(2y+x) = 2\ \ (2y+x) + y\,(2y+x)$$ (بنٹن کے اصول سے)

$$= (2x \times 2y + 2x \times x) + (y \times 2y + y \times x)$$ (پھر بنٹن کے اصول سے)

$$= (4xy + 2x^2) + (2y^2 + xy)$$
$$= 4xy + 2x^2 + 2y^2 + xy$$
$$= 2x^2 + 2y^2 + 4xy + xy$$
$$= 2x^2 + 2y^2 + 5xy$$

نوٹ:- کثیر رکنی کا کثیر رکنی سے ضرب میں ہمیں یکساں رکنوں کو ڈھونڈ کر ایک ساتھ کرلینا چاہیے۔

### 9.4.5 دورکنی کا سہ رکنی سے ضرب

ہم نے سیکھا ہے یک رکنی کا یک رکنی سے ضرب کرنا اور بنٹن اصول کی مدد سے دورکنی سے دورکنی کو ضرب کرنا۔ ہم نے دورکنی اور دورکنی کے ضرب میں دیکھا کہ دورکنی کے ہر ایک رکن سے دورکنی کا ہر ایک رکن ضرب ہوتا ہے۔ اور اس کیلئے بنٹن کے اصول کا استعمال کیا جاتا ہے۔ دورکنی کا سہ رکنی سے ضرب میں بھی اسی اصول کا استعمال کیا جاتا ہے۔ جیسے

دورکنی سے سہ رکنی کے ضرب میں بھی بنٹن کے اصول کا استعمال کیا جاتا ہے۔

$$(2x - y) \times (x + y + z) = 2x \times (x + y + z) - y\,(x + y + z)$$
$$= 2x^2 + 2xy + 2xz - xy - y^2 - yz$$
$$= 2x^2 - y^2 + 2xy - xy + 2xz - yz$$
$$= 2x^2 - y^2 + xy + 2xz - yz$$

اسی طرح ہم بنٹن اصول کا استعمال کرکے عبارتوں کو ضرب کرسکتے ہیں

### حل کئے گئے سوالات

دیئے گئے عبارتوں کو ضرب کیجئے۔

(1) $(2x - 3)$ اور $(3x + 7)$ کا (2) $(6z - 5)$ اور $(z - 3)$ کا

3. $(a + b)(a - b)$

4. $(a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$

5. $(x + y + z)(x - y + z)$

حل۔1 $(3x + 7) \times (2x - 3) = 3x(2x - 3) + 7(2x - 3)$

$= 3x \times 2x - 3x \times 3 + 7 \times 2x - 7 \times 3$

$= 6x^2 - 9x + 14x - 21$

$= 6x^2 + 5x - 21$ (یکساں رکن کو جمع کرنے پر)

حل۔2 $(z - 3) \times (6z - 5) = z(6z - 5) - 3(6z - 5)$

$= 6z^2 - 5z - 18z + 15$

$= 6z^2 - 23z + 15$

حل۔3 $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

حل۔4 $(a - b) \times (a^2 - 2ab + b^2) = a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

نوٹ:-عبارتوں کوان کی معیاری شکل (Standard Form) میں لکھنے کیلئے متغیروں کی ڈگری گھٹتی ہوئی ترتیب میں لکھی جاتی ہے۔

حل۔5 $(x + y + z)(x - y + z) = x(x - y + z) + y(x - y + z) + z(x - y + z)$

$= x^2 - xy + xz + xy - y^2 + yz + xz - yz + z^2$

$= x^2 - y^2 + z^2 - xy + xy + yz - yz + xz + xz$

$= x^2 - y^2 + z^2 + 2xz$

6 سہل کریں $(x + y)(x - 2y + z) - (x - y)z$

حل۔6 $(x + y)(x - 2y + z) - (x - y)z = x(x - 2y + z) + y(x - 2y + z) - (x - y)z$

$= x^2 - 2xy + xz + xy - 2y^2 + yz - xz + yz$

$= x^2 - 2y^2 - 2xy + xy + xz - xz + yz + yz$

$= x^2 - 2y^2 - xy + 2yz$

.7 کسی مکعب کا ایک ضلع $(x + y)$ اکائی تو اس کا حجم کتنا ہوگا۔

حل۔ 7

مکعب کا ضلع $= (x + y)$ اکائی

مکعب کا حجم = ضلع × ضلع × ضلع

مکعب کا حجم $= (x + y) \times (x + y) \times (x + y)$ مکعب اکائی

$= (x + y) \times \{(x \times (x + y) + y \times (x + y)\}$ مکعب اکائی

$= (x + y) \times \{ x^2 + xy + xy + y^2\}$ مکعب اکائی

$= (x + y) \times \{ x^2 + 2xy + y^2\}$ مکعب اکائی

$= x \times (x^2 + 2xy + y^2) + y \times (x^2 + 2xy + y^2)$ مکعب اکائی

$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$ مکعب اکائی

$= (x^3 + y^3 + 3x^2y + 3 xy^2)$ مکعب اکائی

## سوالنامہ۔9.3

.1 دیے گئے الجبرائی عبارتوں کو ضرب کیجیے۔

(a) $(4a - 5b) \times (2a - 6b)$ (b) $(1.5x - 0.5y) \times (1.5x + 0.5y)$

(c) $\left(\frac{1}{2}pq - \frac{3}{2}q\right) \times (pq - q)$ (d) $(a + b) \times (3x - y)$

(e) $(a^2b^2 - c^2d^2) \times (a^2b^2 + c^2d^2)$ (f) $(2a + 2b + c)(a + b - c^2)$

.2 سہل کیجیے

(a) $(a - b)(a + b) - (a + b)(a + b)$

(b) $(a^2 - b)(a - b^2) + (a - b)^2$

(c) $(2.3x - 1.7y)(2.3x + 1.7y + 5) - 5.29x^2 + 2.89y^2$

(d) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

(e) $(x + y + z) \times (x + y + z)$

(f) $(a - b)(b - c) + (b - c)(c - a) + (c - a)(a - b)$

.3 کسی مثلث کا قاعدہ اور متعلق اونچائی بالترتیب $(x + y)^2$ اور $(x - y)^2$ ہے تو اُس کا رقبہ کیا ہوگا؟

4. مستطیل کی لمبائی اُسکی چوڑائی سے $(x + y)$ اکائی زیادہ ہے۔ اگر چورائی z اکائی ہوتو مستطیل کی لمبائی اور رقبہ کیلئے عبارت لکھئے۔

5. اگر کسی لڑکی نے $(x + y)$ روپیہ فی کیلو کی در سے $(m + n)$ کیلوگرام آلو اور y روپیہ فی کیلوگرام کی در سے $(x + y)$ کیلو ٹماٹر خریدے تو اُسے کل کتنی رقم دینی ہوگی۔

6. باپ کی عمر اس کے بیٹے کی عمر سے $(n + m)$ گنا ہے۔ اگر بیٹے کی عمر $(x^2 - y^2)$ سال ہے تو باپ کی عمر کے لئے عبارت لکھئے۔

## 9.5 الجبرائی عبارتوں کی قیمت

ہم نے دیکھا کہ متغیر اور غیر متغیر کی مدد سے عبارت بنتے ہیں۔ متغیر کسی بھی عدد کو ظاہر کرتے۔ متغیر مختلف اعداد کی قیمت لے سکتے ہیں۔ متغیر کی ان مختلف قیمتوں کے لئے ان سے بنی عبارتیں بھی متاثر ہوتی ہیں۔ آیئے ایک عبارت $2x - 5$ پر غور کریں۔

عبارت $= 2x + 5$

عبارت میں متغیر x ہے۔

$x = 0, 1, 2, 3, ........$ رکھنے پر

الجرائی عبارت کی قیمت $= \quad 5 = 2 \times 0 + 5$ جب $x = 0$

الجبرائی عبارت قیمت $= \quad 7 = 2 \times 1 + 5$ جب $x = 1$

الجرائی عبارت کی قیمت $= \quad 9 = 2 \times 2 + 5$ جب $x = 2$

الجرائی عبارت کی قیمت $= \quad 11 = 2 \times 3 + 5$ جب $x = 3$

اس طرح ہم پاتے ہیں کہ متغیروں کی قیمت عبارت کی قیمت کو متاثر کرتی ہے۔

**خود کر کے دیکھئے۔**

متغیر 1 اور $-1$, $x = 0$ کے لئے درج ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کریں

(i) $x^2 + 4x + 4$ (ii) $2x^2 - 3x$ (iii) $7x - 5$

(iv) $\frac{x^2}{2} - 1$ (v) $(x - a)(x - b)$

## 9.6 متماثلہ (Identity)

ہم نے مساوات کوحل کرتے وقت مساوی کو دیکھا ہے۔اس میں دوعبارتیں = (برابر) کےنشان کے ذریعہ الگ رہتی ہیں۔آیئے ایک مساوی $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$ پر غور کریں۔اسمیں متغیر کی کچھ قیمتوں کیلئے دایاں حصہ R.H.S اور بایاں حصہ R.H.S کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

$x = 0$ کیلئے

مساوی کے L.H.S کی قیمت $= (0 + 1)(0 + 2) = 1 \times 2 = 2$

اور مساوی کے .R.H.S کی قیمت $2 + 0 \times 3 + 0^2 = 0 + 0 + 2 = 2$

یہاں .L.H.S کی قیمت= .R.H.S کی قیمت $= 2$

اب $x = -5$ کے لئے

مساوی کے .L.H.S کی قیمت $= (-5 + 1)(-5 + 2) = (-4)(-3) = 12$

اور .R.H.S کی قیمت $= (-5)^2 + 3(-5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$

یہاں بھی .L.H.S کی قیمت = .R.H.S کی قیمت $= 12$

اب $x = 10$ کے لئے دیکھتے ہیں۔

مساوی کے لئے .L.H.S کی قیمت $= (10 + 1)(10 + 2) = 11 \times 12 = 132$

اور R.H.S کی قیمت $= 10^2 + 3 \times 10 + 2 = 100 + 30 + 2 = 132$

یہاں بھی L.H.S کی قیمت=R.H.S کی قیمت $= 132$

اوپر کے سبھی مثالوں سے آپ کیا پاتے ہیں؟ یہ طئے ہے کہ ہر حالت میں مساوی کے دونوں سائڈ برابر آتے ہیں۔ایسی مساوی (equation) جو متغیر کے سبھی قیمتوں کے لئے صحیح ہو متماثلہ کہلاتی ہے۔ہم نے سیکھا ہے کہ مساوات متغیر کی صرف مخصوص قیمتوں کیلئے صحیح ہوتے ہیں۔ اس طرح متماثلہ اور مساوات میں فرق واضح ہوتا ہے۔ایک مساوی $x + 3 = 5$ لیتے ہیں۔اور x کی مختلف قیمتوں کے لئے مساوی کی جانچ کرتے ہیں۔ $x = 0$

تو مساوی کے L.H.S کی قیمت $= 3 + 0 = 3$

R.H.S کی قیمت $= 5$

یہاں L.H.S کی قیمت $\neq$ R.H.S کی قیمت

$x = 1$ کے لئے

L.H.S کی قیمت $= 3 + 1 = 4$

R.H.S کی قیمت $= 5$

یہاں بھی L.H.S کی قیمت ≠ .R.H.S

R.H.S = 5 = 2 + 3 = L.H.S کے لئے x = 2

R.H.S ≠ 6 = 3 + 3 = L.H.S کے لئے x = 3

اس طرح ہم پاتے ہیں کہ 5 = 3 + x ایک متماثلہ نہیں ہے کیونکہ یہ متغیر کے سبھی قیمتوں کیلئے صحیح نہیں ہے۔ یہاں $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$ ایک متماثلہ ہے کیونکہ متغیر کے سبھی قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔

خود کر کے دیکھئے۔

جانچ کر پتا کیجئے کہ کون متماثلہ ہے؟

(i) $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$ (ii) $x^2 + 9 = 9x + x^2$

(iii) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 6a$ (iv) $3(x - y) = 3x - 3y$

## 9.5 معیاری متماثلات (Standard Identities)

ہم کچھ ایسے متماثلوں پر چرچا کرینگے جو عام طور سے استعمال میں آتی ہیں۔

انکے عام استعمال کے وجہ کر ہی یہ معیاری متماثلات کہے جاتے ہیں۔

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

یہاں L.H.S. $= (a + b)^2$

$= (a + b)(a + b)$

$= a(a + b) + b(a + b)$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

= R.H.S.

$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

کیونکہ یہ متماثلہ R.H.S. میں دیئے گئے عبارتوں کے حقیقی حاصل ضرب سے حاصل ہوا ہے۔ اسلئے a اور b کی کسی بھی قیمت کیلئے L.H.S=R.H.S ہوگا۔

II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

یہاں L.H.S. $= (a - b)^2$

$= (a - b)(a - b)$

$= a(a-b) - b(a-b)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 = $ R.H.S.

$\therefore$ $\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

III. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

یہاں L.H.S. $= (a-b)(a+b)$

$= a(a+b) - b(a+b)$

$= a^2 + ab - ab - b^2$

$= a^2 - b^2 = $ R.H.S.

اسلئے $\mathbf{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$

ان تینوں متماثلات کے علاوہ ایک دوسری خاص متماثلہ بھی ہے جسکا استعمال ہم مختلف ریاض کے مسائل کے حل کی شکل میں کرتے ہیں۔

IV. $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

یہاں L.H.S $= (x+a)(x+b)$

$= x(x+b) + a(x+b)$

$= x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a+b)x + ab$ (چونکہ $(a+b)x = ax + bx$)

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

## 9.8 متماثلات کا استعمال

متماثلات کا استعمال کر کے ہم عبارتوں اور اعداد کے ضرب کا ایک سہل اور متبادل طریقہ حاصل کرینگے۔

**مثال۔1** متماثلہ (1) استعمال کرتے ہوئے۔

معلوم کیجئے۔ (i) $(3x^2+2)^2$ (ii) $(49)^2$

حل: (1) $(3x^2+2)^2$

یہاں اگر $a = 3x^2$ اور $b = 2$ مان لیں تو

$(3x^2+2)^2 = (3x^2)^2 + 2(3x^2)(2) + (2)^2$

(متماثلہ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ سے)

$= 9x^4 + 12x^2 + 4$

حل (ii) $(49)^2$

$49^2 = (40+9)^2$

$= (40)^2 + 2 \times 40 \times 9 + 9^2$

$= 1600 + 720 + 81$

$= 2401$

آسان مسائل کے حل میں بھلے ہی یہ طریقہ تھوڑا پریشان کن لگتا ہو لیکن مشکل عبارتوں کے لئے یہ بے حد آسانی فراہم

کرتا ہے۔

مثال۔2 متماثلہ (ii) کا استعمال کرتے ہوئے۔

(i) $(3p - 7q)^2$ (ii) $49^2$ کو معلوم کیجئے۔

حل: (i) $(3p - 7q)^2$

(ii) سے $(3p - 7q)^2 = (3p)^2 - 2 \times 3p \times 7q + (7q)^2$

$= 9p^2 - 42\,pq + 49q^2$

حل (ii) $49^2 = (50 - 1)^2$

$= (50)^2 - 2 \times 50 \times 1 + (1)^2$

$= 2500 - 100 + 1$

$= 2501 - 100 = 2401$

اوپر کے مثالوں میں آپ نے دیکھا کہ متماثلہ (i) اور (ii) کے استعمال سے $(49)^2$ معلوم کیا گیا ہے۔ کیا آپ

$(3p - 7q)^2$ متماثلہ (i) کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں؟ $(3x^2 + 2)^2$ کو بھی متماثلہ (ii) کی مدد سے معلوم کیجئے۔

مثال۔3. متماثلہ (iii) کی مدد سے ذیل کی عبارتوں کی قیمت معلوم کیجئے۔

(i) $(7x - 3y)(7x + 3y)$ (ii) $95^2 - 5^2$ (iii) $996 \times 1004$

(i) (III) سے $(7x - 3y)(7x + 3y) = (7x)^2 - (3y)^2$

$= 49x^2 - 9y^2$

(ii) $95^2 - 5^2 = (95 - 5)(95 + 5)$

متماثلہ (III) سے $= 90 \times 1000$

$= 90000$

(iii) $996 \times 1004 = (1000 - 4)(1000 + 4)$

(III) سے $= (1000)^2 - (4)^2$

$= 1000000 - 16$

$= 999984$

مثال۔4. متماثلہ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ کا استعمال کرتے ہوئے ذیل کو حل کریں۔

(i) $101 \times 102$ (ii) $45 \times 54$

(l) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2$ (n) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

2. سہل کیجئے

(a) $(3a-5b)^2-(3a+5b)^2$ (b) $(x^2+y^2)^2$

(c) $(xyz+xy)^2-2x^2y^2z$ (d) $\left(\frac{2x}{5}-\frac{3y}{4}\right)\left(\frac{2x}{5}+\frac{3y}{4}\right)$

(e) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(2a-\frac{3}{a}\right)^2$ (f) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

3. متماثلوں کا استعمال کر کے درج ذیل کی قیمت معلوم کیجئے۔

(a) $81^2$ (b) $(999)^2$ (c) $(52)^2$

(d) $(498)^2$ (e) $(5.5)^2$ (f) $191 \times 209$

(g) $10.5 \times 9.5$ (h) $(101)^2-(99)^2$ (i) $(1.5)^2-(0.5)^2$

4. متماثلہ $(x+a)(x+b) = x + (a+b)x + ab$ کا استعمال کر کے درج ذیل کا حاصل ضرب اور قیمت معلوم کیجئے۔

(a) $(x+3y)(x+5y)$ (b) $(3x+7)(3x+5)$

(c) $(x-5)(x+4)$ (d) $(2x-7)(2x-9)$

(e) $52 \times 53$ (f) $3.1 \times 3.2$

## ہم نے سیکھا

1. عبارت متغیروں اور غیر متغیروں کا با معنی مجموعہ ہوتا ہے۔ متغیر کا متغیر کے ساتھ ضرب، جوڑ گھٹاؤ اور تقسیم کر کے حاصل کرتے ہے۔
2. عبارت میں رُکن + یا - نشان کے ذریعہ الگ رہتے ہیں
3. متغیر کی قیمت سے عبارت کی الگ الگ قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔
4. متماثلہ: ایک ایسی مساوی یا مساوات ۔ جو متغیر کی سبھی قیمتوں کے لئے صحیح ہوتا ہے۔ متماثلہ کہلاتی ہے۔
5. مساوات: ایک ایسا مساوی جو متغیر کے کچھ مخصوص قیمتوں کے لئے صحیح ہو مساوات کہلاتا ہے۔

*