باب-14 اجزائے ضربی (Factors)

14.1 تمہید

آپنے اجزائے ضربی کے بارے میں پڑھا ہے۔آیئے اجزائے ضربی کی بنیاد پر کچھ سوالوں کو حل کریں۔
نیچے جدول میں کچھ اعداد کے سبھی اجزائے ضربی دیئے گئے ہیں۔ باقی اعداد کے سبھی اجزائے ضربی خالی جگہوں میں بھریں

جدول

عدد	سبھی اجزائے ضربی
1	1
2	2,1
3	1
4	....
5	....
6	6,3,2,1
7	....

عدد	سبھی اجزائے ضربی
18	....
21	21,7,3,1
27	....
28	....
29	29,1
30	....

جدول سے ایسے اعداد لکھیے جنکے صرف دو جز ضربی ہیں

....

کیا آپ بتا سکتے ہیں ایسے اعداد کو کیا کہتے ہیں؟

....

اب دو سے زیادہ اجزائے ضربی والے اعداد کو یہاں لکھیے۔

....

یہ سبھی منقسم (Composite) اعداد ہیں

سوچئے کیا 2 کے علاوہ کوئی اور جفت (Even) عدد غیر منقسم (Prime) ہوسکتا ہے۔

کیا سبھی اعداد غیر منقسم اجزائے ضربی کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں؟ سوچئے الگ الگ اعداد لے کر انکے غیر منقسم اجزائے ضربی کر کے دیکھئے

....

کیا اعداد کی طرح ہی الجبرائی عبارتوں کے بھی اجزائے ضربی کئے جا سکتے ہیں؟ آیئے اسے سمجھیں۔

14.2 الجبرائی عبارتوں کے اجزائے ضربی

$3x^2y$ ایک عبارت ہے۔ آپ نے دیکھا ہے کہ عبارت کے رکن اجزائے ضربی کے حاصل ضرب ہوتے ہیں۔ یہاں $3x^2 = 3 \times x \times x \times y$ ہے اسکے بعد اجزائے ضربی نہیں کئے جا سکتے ہیں۔ اسلئے دیا گیا اجزائے ضربی $3x^2y$ کا غیر منقسم اجزائے ضربی ہے۔ الجبرائی ضمن میں اسے ''غیر منقسم اجزائے ضربی'' کہتے ہیں۔ $3x^2y$ کا ایک اجزائے ضربی درج ذیل ہے:۔

$$3x^2 = 3x^2 \times y$$

کیا یہ غیر منقسم اجزائے ضربی ہے؟ واضح طور پر 3 کا غیر منقسم جز ضربی 3 ہے حقیقت میں 1 ہر ایک رکن کا جز ضربی ہے لیکن مخصوص حالت میں جب ضروری ہو تب ہی اسے لکھا جاتا ہے۔ x^2 کو $x \times x$ جز ضربی کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اسلئے $3 \times x^2 \times y$ غیر منقسم اجزائے ضربی نہیں ہے۔ ایک دوسری عبارت $2y^2(y+1)$ پر غور کریں۔ کیا اسے اسکے غیر منقسم اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے؟ سوچئے

$25 = 25 \times 1$

کیا یہ 25 کا غیر منقسم شکل ہے؟

اسے غیر منقسم شکل میں لکھئے؟

....

$12 = 2 \times 6$

کیا یہ غیر منقسم شکل ہے؟

کیوں نہیں؟

$$2y^2(y+1) = 2 \times y \times y(y+1)$$

خود کر کے دیکھئے

نمبر شمار	رکن/عبارت	غیر منقسم اجزائے ضربی
1	$5xyz$	$5 \times x \times y \times 2$
2	$9y^2$	....
3	$16\ xy^2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times x \times y \times y$
4	$13\ xyz$	....
5	$12x\ (y + 1)$	....

اوپر دیئے گئے مثالوں سے آپکو یہ تو صاف ہو ہی گیا ہوگا کہ جب ہم کسی الجبرائی عبارت کا اجزائے ضربی کرتے ہیں تو ہم اسے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھتے ہیں۔ یہ اجزائے ضربی اعداد، متحرک یا متغیر یا الجبرائی عبارت ہو سکتے ہیں۔ کسی بھی عدد یا عبارت کو ایسے ٹکڑوں میں بانٹنا جسکے حاصل ضرب سے وہ بنا ہو (یعنی جس کا پورا حصہ اس عدد یا عبارت میں آجائے) اجزائے ضربی کرنا ہوتا ہے۔ عبارت $5xyz$, $3xy$, $5x(y + z)$ جیسی عبارتیں پہلے سے ہی اجزائے ضربی کی شکل میں ہیں جیسے $5xyz = 5 \times x \times y \times z$

اب ذرا $3x + 6$, $2x + 4$, $x^2 + 2x$ جیسی عبارتوں پر غور کیجئے۔ $3x + 6$ کن اعداد اور عبارتوں کے ضرب سے بنا ہے؟ آیئے کچھ عبارتوں کے اجزائے ضربی کرنے کے طریقے نکالیں۔

14.3 مشترک (Common) جز ضربی کے ذریعہ اجزائے ضربی کرنا

اوپر دی گئی عبارت $3x + 6$ پر غور کیجئے۔ اس میں دو رکن $3x$ اور 6 ہیں دونوں رکنوں کو انکے غیر منقسم اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھتے ہیں۔

$$3x = 3 \times x$$
$$6 = 2 \times 3$$
$$3x + 7 = 3 \times x + 2 \times 3$$

دھیان دیں۔ یہاں جز ضربی 3 دونوں رکنوں میں مشترک ہے۔ اسے مشترک جز ضربی کہتے ہیں۔

بنٹن کے اصول سے ہم جانتے ہیں کہ

$$a \times b + a \times c = a(b + c)$$

اسلئے $3x + 2 \times 3 = 3(x + 2)$

اسلئے $3x + 6 = 3 \times x + 2 \times 3$

$$= 3(x + 2)$$

اسطرح عبارت $3x + 6$ وہی ہے جو $3 \times (x + 2)$ ہے۔اب ہم اسکے جز ضربی پڑھ سکتے ہیں۔یعنی 3 اور $(x + 2)$ عبارت کے غیر منقسم اجزائے ضربی ہیں۔آیئے اب $6a^2b - 9ab$ کا اجزائے ضربی کرتے ہیں۔ اسکے لئے پہلے دونوں رکنوں کے اجزائے ضربی لکھیں۔

> $3(x+2)$ کو اُنکے اجزائے ضربی سے تقسیم کر کے دیکھیں، کیا تقسیم پورا۔پورا جاتا ہے؟

$$6a^2b = 2 \times 3 \times a \times a \times b$$
$$4ab = 3 \times 3 \times a \times b$$

ظاہر ہے کہ دونوں رکنوں میں $3, a, b$ مشترک جز ضربی ہیں۔اسلئے

> ایک عبارت حاصل ضرب کی شکل میں یک رکنی ہوتا ہے

$$6ab - 9ab = (2 \times 3 \times a \times a \times b) - (3 \times 3 \times a \times b)$$
$$= (2 \times 3ab \times a) - (3 \times 3ab)$$
$$= 3ab\ (2 \times a - 3)$$
$$= 3ab(2a - 3)$$

($3ab$ مشترک لینے پر)

یہی مطلوبہ اجزائے ضربی ہے۔

ہم نے دو رکنوں والے عبارت کا اجزائے ضربی کیا ہے۔اسی طرح دو سے زیادہ رکن والے عبارتوں کا حاصل ضرب بھی کیا جا سکتا ہے۔جیسے

$15a^4 - 20a^3 + 5a^2$ کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

یہ سہ رکنی (Trinomial) عبارت ہے۔ پہلے ہم ہر ایک رکن کا دو رکنی کی طرح غیر منقسم اجزائے ضربی نکالتے ہیں۔

حل:

$$15a - 20a + 5a = (3 \times 5 \times a \times a \times a \times a) - (2 \times 2 \times 5 \times a \times a \times a) + (5 \times a \times a)$$

دھیان دیجئے یہاں $5 \times a \times a$ اجزائے ضربی مشترک ہے۔اسلئے مشترک کو بنٹن کے اصول کے مطابق باہر لیتے ہیں۔

> $15a = 3 \times 5 \times a \times a \times a \times a$
> $20a =$ ....
> $5a =$ ....

$$= 5 \times a \times a\ (3 \times a \times a - 2 \times 2 \times a + 1)$$
$$= 5a^2\ (3a^2 - 4a + 1)$$

خود کر کے دیکھئے (اجزائے ضربی معلوم کیجئے)۔

(i) $11xy + 22$ (ii) $p + pq - pqr$ (iii) $13x^2 - 2by^2$

(iv) $4p^2q^2r^2 + 2pqr$ (v) $7xy - 8y$

14.4 رکنوں کی ترتیب بدل کر اجزائے ضربی معلوم کرنا

عبارتوں کا اجزائے ضربی کرتے وقت ہمیں کئی بار ایسی عبارتیں مل جاتی ہیں جنکے سبھی رکنوں میں کوئی بھی مشترک جز ضربی (1 کو چھوڑ کر) نہیں ہوتا ہے۔ لیکن رکن کے کچھ جوڑوں میں مشترک جز ضربی ہوتے ہیں۔ جیسے $ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ میں دکھائی دیتا ہے۔ آیئے اسے سمجھیں۔

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ میں کیا آپ کو کوئی مشترک جز ضربی ملتا ہے؟

پر جب ہم اسے الگ طرح سے ترتیب دیتے ہیں جیسے:

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2 = ax^2 + bx^2 + ay^2 + by^2$ (پھر ترتیب دینے پر)

تب اسکے پہلے دو رکنوں میں x^2 اور آخری دو رکنوں میں y^2 مشترک ہو جاتا ہے۔

$= x^2 (a + b) + y^2 (a + b)$

$= (a + b)(x^2 + y^2)$ (مطلوبہ اجزائے ضربی)

اسطرح عبارتوں کی ترتیب بدل کر اسکا جز ضربی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہی دوبارہ ترتیب کے ذریعہ اجزائے ضربی کرنا ہے۔ دوبارہ ترتیب ایک سے زیادہ طریقوں سے کی جا سکتی ہے۔ لیکن نتیجہ غیر تبدیل رہتا ہے۔ ترتیب بدل سکتے ہیں کیونکہ آپ جانتے ہیں کہ ضرب کے عمل میں ترتیب بدلنے سے نتائج نہیں بدلتے۔ اس عبارت کو ایک اور طریقہ سے دوبارہ ترتیب دیکر اجزائے ضربی کیا جا سکتا ہے۔ جیسے:

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2 = ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ (دوبارہ ترتیب سے)

$= a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2)$ (مشترک لینے پر)

$= (x^2 + y^2)(a + b)$

اسطرح دوبارہ ترتیب کے ذریعہ اجزائے ضربی میں ہم ذیل مرحلوں میں کام کرتے ہیں۔

مرحلہ۔1 جانچ کرتے ہیں کہ عبارت کے سبھی رکنوں میں کوئی مشترک جز ضربی ہے یا نہیں

مرحلہ۔2 سبھی رکنوں میں مشترک جز ضربی نہیں ہونے پر ایسے رکنوں کی پہچان کرتے ہیں جسمیں مشترک جز ضربی ہو پھر ان رکنوں کو گروپ میں ترتیب دیتے ہیں

مرحلہ۔3 ہر گروپ کا اجزائے ضربی نکالتے ہیں

مرحلہ۔4 گروپوں کے مشترک جز ضربی کی پہچان کر الگ کر بنٹن اصول سے منظم کرتے ہیں۔

اسے بھی سمجھئے۔

$9ab + 6b^2 + 3a + 2b$ (دوبارہ ترتیب کرنے پر)

$= 3b(3a + 2b) + 1\,(3a + 2b)$ (1 سب کے لئے مشترک ہوتا ہے)

$= (3b + 1)(3a + 2b)$

جیسے $ab + ac + db + dc$ کا اجزائے ضربی کیجئے۔

مرحلہ۔1 یہاں چاروں رکن میں کوئی مشترک جز ضربی نہیں ہے۔

مرحلہ۔2 عبارت کے رکن $(ab + ac)$ کا ایک گروپ بناتے ہیں کیونکہ $(ab + ac)$ میں مشترک جز ضربی a ہے۔اسی طرح $(db + dc)$ کا ایک گروپ بناتے ہیں (کیوں؟)

مرحلہ۔3 اب دونوں گروپوں کا اجزائے ضربی کرتے ہیں۔

$$ab + ac + db + dc = (ab + ac) + (db + dc)$$
$$= a(b + c) + d(b + c)$$

مرحلہ۔4 اب دونوں گروپوں کے مشترک جز ضربی $(b + c)$ کو بٹن کے اصول سے منظم کرتے ہیں۔

$$a(b + c) + d(b + c) = (b + c)(a + d)$$

یعنی $ab + ac + db + dc = (b + c)(a + d)$

مندرجہ بالا عبارت کا ایک دوسرے طریقہ سے گروپنگ کر کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

سوالنامہ 14.1

1۔ دیئے گئے رکنوں میں مشترک اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(a) $9y, 27$ (b) $5x, 25x$ (c) $7ab, -14ab$

(d) $-16x^2y^2, -x^2y^2z^2$ (e) $17x, 102y$ (f) $11xyz, 10z$

(g) a^2bc, ab^2c, abc^2 (h) $2x, 3y, 5z$

(i) $20x^2y^2, 30y^2z^2, 40x^2z^2$ (j) $2x(a + b), x(a + b)$

2۔ دیئے گئے مثال کی بنیاد پر خالی جگہوں کو بھریئے:۔

ترتیب نمبر	رکن	الگ کیا گیا اجزائے ضربی	باقی بچا اجزائے ضربی
I	$12x^2y$	$3x$	$4xy$
II	$15ab$	-3	....
III	$-20xy$	$-2xy$	....
IV	$40x^2y^2$	....	-20
V	$-27abc$	....	$-3ab$

3۔ مندرجہ ذیل کا اجزائے ضربی معلوم کیجیے:۔

(a) $12x^2 - 15y^2 - 24^2xz^2$ (b) $-6a^2 + 36a - 24\,ab$

(c) $3a^2 + ab + 9a + 3b$ (d) $6ab - 4b + 6 - 4a$

(e) $ab^2 + a^2b + ac + bc$ (f) $a^2bc + b^2ca + c^2ab + a + b + c$

(g) $a(b - c) + d(c - b)$ (h) $3y(y + 3) + 6y(3y + 4)$

(i) $a^2 - 3a^2 + a - 3$ (j) $ab^2 - bc^2 - ab + c^2$

(k) $xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2)$

14.5 متماثلات (Identities) کے استعمال سے اجزائے ضربی

آپ $(a + b)^2$ اور اسکی پھیلی ہوئی شکل $(a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b)$ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ اسلئے جب عبارت مکمل مربع ہو تو معیاری متماثلہ کا استعمال کر کے۔ اسکا اجزائے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ آیئے معیاری متماثلوں کے استعمال سے عبارتوں (مکمل مربع) کا اجزائے ضربی کرتے ہیں

(i) $9x^2 + 12xy + 4y^2$ (ii) $4p^2q^2 - 8pqr + 4r^2$

(iii) $x^2 + 25y^2 - 10xy^2$

حل: یہاں $9x^2 + 12xy + 4y^2$

$= (3x)^2 + \times 3x \times 2y + (2y)^2$

$= (a)^2 + 2 \times a \times b + b^2$

$= (3x + 2y)^2 \quad [\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)]$

$= (3x + 2y)\ (3x + 2y)$

یہاں $a = 3x$ اور $b = 2y$ ہے

مندرجہ بالا مثال میں ہم نے عبارت کو $a^2 + 2ab + b^2$ کی شکل میں بدلا جس سے ہمیں اجزائے ضربی حاصل ہوا۔ اسی طرح دوسری عبارتوں کو معیاری شکل میں بدل کر اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں۔

(ii) $4p^2q^2 - 8pqr + 4r^2 = 4(p^2q^2 - 2pqr + r^2)$

$= 4[(pq)^2 - 2 \times (pq)r + (r)^2]$

$= 4\ (pq - r)^2$ (کیوں)

$= 4(pq - r)\ (pq - r)\ [a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$

دیئے گئے مثال میں مشترک جز ضربی کو الگ کرنے سے معیاری شکل حاصل ہوتا ہے۔

(iii) $x^2 + 25y^2 - 10xy^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$

$$= (x)^2 - 2x.5y. + (5y)^2$$
$$= (x - 5y)^2$$
$$= (x - 5y)\,(x - 5y)$$

اس طرح ایسی عبارت جو مکمل مربع (Whole square) ہوتی ہیں۔ اُنکا اجزائے ضربی معیاری متماثلات کی بنیاد پر کیا جاسکتا ہے۔

14.6 دو مربعوں کے فرق کی شکل میں دیئے گئے عبارتوں کا اجزائے ضربی

ہم جانتے ہیں:

$$a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$$

اس شکل میں دی گئی عبارتوں کو مناسب معیاری تماثلہ کی شکل میں بدل کر اسکا اجزائے ضربی معلوم کرسکتے ہیں۔ دیئے گئے مثالوں ذریعہ اسے سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

مندرجہ ذیل عبارتوں کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $16x^2 - 9y^2$ (i) $x^4 - y^2$

(iii) $(p + q)^2 - (r - s)^2$ (iv) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$ (v) $5^2 - 4^2$

(i) $16x^2 = (4x)^2$, $9y^2 = (3y)^2$ $\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$\therefore 16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2$$
$$= (4x - 3y)\,(4x + 3y)$$

(ii) $x^4 - y^2 = (x^2)^2 - (y)^2$

$$= (x^2 - y)\,(x^2 + y)$$

(iii) $(p + q)^2 - (r - s)^2 = \{(p + q) - (r - s)\}\ \{(-p + q) + (r - s)\}$

$$= \{p + q - r + s\}\ \{p + q + r - s\}$$
$$= (p + q - r + s)\,(p + q + r - s)$$

(iv) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz = (x)^2 - (y^2 + z^2 - 2yz)$

$$= (x)^2 - (y - z)^2 \quad [(a - b)^2 \text{ سے}]$$
$$= \{x - (y - z)\}\ \{x + (y - z)\}$$
$$= (x - y + z)\,(x + y - z)$$

متماثلہ $(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + ab$ پر مشتمل عبارتوں کا اجزائے ضربی

عبارت $x^2 + 8x + 15$ پر غور کیجئے۔ کیا آپ پہلے دیئے گئے کسی طریقے سے اسکا اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں؟ ہم پاتے ہیں کہ اسکا اجزائے ضربی معیاری متماثلوں سے نہیں کیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ مکمل مربع نہیں ہے؟ یہ مکمل مربعوں کے فرق کی شکل میں بھی نہیں ہے۔ آیئے دی گئی عبارت $x^2 + 8x + 15$ کے اجزائے ضربی کرنے کا طریقہ سمجھیں۔

متماثلہ $x^2 + (a + b)x + ab$ کے ذریعہ عبارت $x^2 + 8x + 15$ کے اجزائے ضربی کرنے کا طریقہ

مثال۔1 $x^2 + 8x + 15$

اگر ہم $x^2 + 8x + 15$ کا موازنہ $x^2 + (a + b)x + ab$ سے کریں تو ہم پائینگے کہ $ab = 15$ اور $a + b = 8$ ہے۔ اسکا مطلب ہے کہ ساکن رکن 15 کے ایسے دو جز ضربی ہوں جنکا حاصل ضرب 15 ہو اور $a + b$ کا حاصل جمع x کے ضربی عدد کے برابر یعنی 8 ہو۔ آپ a اور b کی الگ الگ قیمت سوچئے جنکا حاصل جمع 8 ہو اور جنہیں ضرب کرنے پر آپکو 15 ملتا ہے۔ آیئے $a = 4, b = 4$ انکا حاصل جمع $4 + 4 = 8$ ہے انکا حاصل ضرب $4 \times 4 = 16$ ہے جو اوپر دی گئی شرط کو پورا نہیں کرتا ہے۔ اب اگر $a = 1$ اور $b = 15$ تو $a \times b = 15$ لیکن $a + b = 15 + 1 = 16$۔ اس لئے a اور b کی مندرجہ بالا قیمتیں بھی دونوں شرطوں کو پورا نہیں کرتیں۔ اب اگر $a = 3$ اور $b = 5$ لیں $a + b = 3 + 5 = 8$ اور $3 \times 5 = 15$ اسلئے $a = 3$، $b = 5$ صحیح متبادل ہے۔

$$\therefore \text{جز ضربی}\ (x + a) = (x + 3)$$

$$(x + b) = (x + 5)$$

$$\therefore\ x^2 + 8x + 15 = x^2 + (3 + 5)x + 3 \times 5$$

$$= (x + 3)\ (x + 5)$$

$$[\ x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

اسلئے عام طور سے $x + mx + n$ کی شکل والے عبارتوں کو اجزائے ضربی کرنے کے لئے ہم ذیل مرحلوں میں کام کرتے ہیں۔

مرحلہ۔1 عبارت کے رکنوں کو انکے قوت نماؤں کی گھٹتی ترتیب میں رکھینگے

مرحلہ۔2 ساکن رکن n کے ایسے دو جز ضربی a اور b اسطرح لینگے کہ $a + b = m$ اور $a \times b = n$

مرحلہ۔3 بیچ والے رکن کو بنٹن کے اصول سے توڑیں گے یعنی

$$mn = (a + b)x = ax + bx$$

مرحلہ۔4 عبارت کی دوبارہ گروپنگ کر کے اجزائے ضربی کرینگے۔ جیسے

$$\begin{aligned} x^2 + mx + n &= x^2 + (a + b)x + ab \\ &= x^2 + ax + bx + ab \\ &= x(x + a) + b(x + a) \\ &= (x + a)\ (x + b) \end{aligned}$$

کچھ مثالوں سے اسے سمجھنے کی کوشش کیجئے۔

مندرجہ ذیل عبارت کا اجزائے ضربی نکالئے

(i) $x^2 + 21x + 80$ (ii) $y^2 - 15y + 56$

حل:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} x^2 + 21x + 80 &= x^2 + (16 + 5)x + 16 \times 5 \\ &= x^2 + 16x + 5x + 16 \times 5 \\ &= x(x + 16) + 5\ (x + 16) \\ &= (x + 16)\ (x + 5) \end{aligned}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{aligned} y^2 - 15y + 56 &= y^2 + \{(-7) + (-8)\}\ y + (-7)(-8) \\ &= y^2 - 7y - 8y + (-7)\ (-8) \\ &= y(y - 7) - 8(y - 7) \\ &= (y - 7)\ (y - 8) \end{aligned}$$

آپنے دیکھا کہ $x^2 + mx + n$ کی طرح کی عبارت کا اجزائے ضربی متماثلہ کے استعمال سے کیسے کیا گیا۔

$ax^2 + bx + c$ کی طرح کے عبارتوں کا اجزائے ضربی نکالنا ہم آگے کے درجوں میں سیکھینگے۔

سوالنامہ۔ 14.2

1۔ مندرجہ ذیل عبارتوں کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(a) $1 + 2x + x^2$
(b) $a^2b^2 - 6abc + 9c^2$
(c) $1 - (a - b)^2$
(d) $16(a - b)^2 - 9(a + b)^2$
(e) $(x + y)^2 - 10(x + y) + 25$
(f) $ax^2 - bx - 4ab$
(g) $4x^2 - y^2 + 4y - 4$
(h) $9x^2 - \frac{x^2}{4}$
(i) $a^2 + a + 4 + 3a$
(j) $x^2 + 6x + 8$
(k) $y^2 - 13y + 30$
(l) $x^2 + 9x - 22$

2۔ درج ذیل عبارتوں کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(a) $x^2 - 6x - 135$
(b) $8(x + y)^3 - 50(x + y)$
(c) $4x^2 + 9y^2 + 12xy - 1$
(d) $75 - x^2 + 10x$
(e) $12a^2 - 27$
(f) $ax^2 - bx^2 + by^2 - ay^2$

3۔ مندرجہ ذیل عبارتوں کا اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(a) $16x^4 - 81y^4$
(b) $x^4 - 1$
(c) $x^4 - (x - y)^4$
(d) $9x^2 - 4y^2 - 3x + 2y$
(e) $(x + y)^3 + 4(x + y)^2 + 4x + 4y$

14.8 الجرائی عبارتوں کی تقسیم:

ابھی تک ہم نے الجرائی عبارتوں کے اعمال (Operations) میں جوڑنا، گھٹانا، ضرب کرنا اور اجزائے ضربی کرنا سیکھا۔ یہاں ہم الجرائی عبارتوں کو تقسیم کرنا سمجھینگے۔ آپ نے سیکھا کہ تقسیم، ضرب کے اُلٹا عمل ہے۔

اگر $2 \times 3 = 6$ تو $6 \div 2 = 3$

یا $6 \div 3 = 2$

اس خاصیت کا استعمال ہم الجرائی عبارتوں کے تقسیم میں بھی کرتے ہیں۔

اگر $2x \times 3x = 6x^2$

تو $6x^2 \div 2x = 3x$

$6x^2 \div 3x = 2x$

اسے ایسے بھی سمجھے

$$\frac{6x^2}{2x} = \frac{2 \times 3 \times x \times x}{2 \times x} = 3x$$

الجرائی عبارتوں کے تقسیم کو سمجھنے کیلئے یک رکنی کا یک رکنی سے تقسیم پر غور کرتے ہیں۔

14.8.1 ایک رکنی کا ایک دوسرے یک رکنی سے تقسیم

$6x^2y$ کو $2x$ سے تقسیم کیجئے۔

ہمیں $6x^2y \div 2x$ معلوم کرنا ہے یعنی $\dfrac{6x^2y}{2x}$ معلوم کرنا ہے

ہم $6x^2y$ اور $2x$ کا غیر منقسم اجزائے ضربی حاصل کرتے ہیں۔

$$6x^2y = 2 \times 3 \times x \times x \times y$$

$$2x = 2 \times x$$

اسلئے $$\frac{6x^2y}{2x} = \frac{2 \times 3 \times x \times x \times y}{2 \times x} = \frac{(2 \times x)(3 \times x \times y)}{2 \times x}$$

ہم پاتے ہیں کہ نسب نما اور شمار کنندہ میں مشترک جز ضربی $(2 \times x)$ ہے جسے اسی طریقہ سے ہٹا دیتے ہیں جیسے ہم اعداد کے تقسیم میں کرتے ہیں۔

اسے ہم ذیل طریقہ سے بھی حل کر سکتے ہیں۔

$$\frac{6x^2y}{2x} = \frac{2 \times 3 \times x \times x \times y}{2 \times x} = 3 \times x \times y = 3xy$$

$\boxed{\left(\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}\right.}$ **قوت نما کے اصول سے)**

مثال۔2 مندرجہ ذیل کو حل کیجئے۔

$$-12a^4b^5 \div (-3a^2b^2)$$

حل: $$-12a^4b^5 + (-3a^2b^2) = \frac{-12a^4b^5}{-3a^2b^2}$$

$$= \frac{-2\times2\times3\times a\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times b}{-3\times a\times a\times b\times b}$$

$$= \frac{-2\times2\times3\times a\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times b}{-1\times3\times a\times a\times b\times b}$$

$$= \frac{-2\times2\times a\times a\times b\times b\times b}{-1}$$

$$= \frac{-4a^2b^3}{-1}$$

$$= \frac{-4a^2b^3}{-1}\times\frac{(-1)}{(-1)}$$ (نسب نما اور شمار کنندہ کو (1-) سے ضرب کرنے پر)

$$= \frac{4a^2b^3}{1} = 4a^2b^3$$

خود کر کے دیکھیے

تقسیم کیجیے

(i) $18a^2b^2 \div 18$ (ii) $9x^2y \div x^2y$

(ii) $-8xy \div 2y$ (iv) $2ab \div 3$

14.8.2 کثیر رکنی کا یک رکنی سے تقسیم

ایک سہ رکنی $24 + 6x^2 = 4x^3$ میں یک رکنی $2x$ سے تقسیم کرتے ہیں۔ دیا گیا ہے

$$4x^3 - 6x^2 + 2x \div 2x = \frac{4x^3-6x^2+2x}{2x}$$

(سبھی رکنوں کا اجزائے ضربی کرنے پر) $$= \frac{2\times2\times x\times x\times x-2\times3x\times x+2\times x}{2x}$$

$$= \frac{(2\times x)\times(2\times x\times x)-(2\times x)(3\times x)+(2\times x)\times1}{2\times x}$$

$$= \frac{(2\times x)\{(2\times x\times x)-(3\times x)+1\}}{2\times x} = \frac{2x(2x^2-3x+1)}{2x}$$

نسب نما اور شمار کنندہ سے مشترک اجزائے ضربی ہٹانے پر

$$\frac{4x^3-6x^2+2x}{2x} = 2x^2-3x+1$$ (مطلوبہ حاصل تقسیم)

آیئے ایک دوسرے طریقہ سے اسے کریں

$$\frac{4x^3-6x^2+2x}{2x} = \frac{4x^3}{2x} - \frac{6x^2}{2x} + \frac{2x}{2x}$$

(عبارت کے ہر ایک رکن میں تقسیم کنندہ سے تقسیم کرنے پر)

مطلوبہ حاصل تقسیم $= 2x^2 - 3x + 1$

اس طرح ہم نے پایا کہ کسی کثیر رکنی میں تقسیم کرنے کے لئے اسکا اجزائے ضربی کر یک رکنی بناتے ہیں۔ پھر منقسم (Dividend) عبارت اور تقسیم کنندہ (Divisor) کے مشترک اجزائے ضربی کو مناسب طریقہ سے ہٹا کر تقسیم کا عمل پورا کرتے ہیں۔ ہم نے یہ بھی پایا کہ کثیر رکنی میں یک رکنی سے تقسیم دینا اس عبارت کے ہر ایک رکن میں اس یک رکنی سے تقسیم کرنے کے برابر ہوتا ہے۔

اب ذرا سوچئے اگر مندرجہ بالا مثال میں عبارت کا ایک رکن 3 ہوتا ہے تو کیا ہم $2x$ سے اس کثیر رکنی عبارت میں پورا تقسیم دے پاتے؟

ایک دوسرے مثال سے اسے سمجھتے ہیں۔

$(3x^3 - 5x^2 + 12x) \div 6x$

$$= \frac{3x^3-5x^2+12x}{6x} = \frac{3x\times x^2 - 3x\times\frac{5x}{3} + 3x\times 4}{3x\times 2}$$

$$= \frac{3x(x^2 - \frac{5x}{3} + 4)}{3x\times 2}$$

$$= \frac{x^2 - \frac{5x}{3} + 4}{2}$$

کیا $5x^2$ کو $3x \times \frac{5x}{3}$ کی شکل میں رکھنے پر کوئی فرق پڑا

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{3} \div 2 + \frac{4}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{3} \times \frac{1}{2} + 2$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{6} + 2$$

دوسرے طریقہ سے

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 12x}{6x} = \frac{3x^3}{6x} - \frac{5x^2}{6x} + \frac{12x}{6x}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{6} + 2$$

خود کر کے دیکھئے۔

تقسیم دیجئے

(i) $24\,(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 9abc$

(ii) $(4x^2 - 12xy + 6y^2) \div 2xy$ (iii) $(x^2 - 2x - 1) \div 2$

(B) 14.8.3 کثیر رکنی کا کثیر رکنی سے تقسیم

ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ تقسیم کرتے وقت کثیر رکنی کو یک رکنی بنا کر یک رکنی سے تقسیم کرتے ہیں۔ یا یک رکنی سے کثیر رکنی کے ہر ایک رکن میں تقسیم کرتے ہیں۔ کثیر رکنی سے کثیر رکنی میں تقسیم کرتے وقت بھی ہم اس حقیقت کا دھیان رکھتے ہیں۔ یہاں دھیان دینے والی بات یہ ہے کہ ایک سے زیادہ رکن والے عبارتوں کو بھی یک رکن کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اجزائے ضربی کرنے پر وہ یک رکنی عبارت بن جاتے ہیں۔ آیئے اس اصول کا استعمال کر کثیر رکنی سے کثیر رکنی میں تقسیم کریں جیسے $x^2 + 2x$ کو $x + 2$ سے تقسیم دیجئے۔

حل: دیا گیا ہے۔

$$(x^2 + 2x) \div (x + 2) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+2)}$$

کسب نما اور شمار کنندہ میں مشترک اجزائے ضربی $(x + 2)$ ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی عدد میں اسی عدد سے تقسیم دینے پر حاصل تقسیم 1 ہوتا ہے۔ اسلئے

$$\frac{(x+2)}{(x+2)} = 1$$

$$= x \times 1$$

$$= x$$

مثال۔3 $4x^2 - 12xy + 9y^2 \div (4x^2 - 9y^2)$

حل: دیا گیا ہے

$$\frac{4x^2 - 12xy + 9y^2}{4x^2 - 4y^2} = \frac{(2x)^2 - 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2}{(2x)^2 - (3y)^2}$$

$$= \frac{(2x-3y)^2}{(2x-3y)(2x+3y)}$$ (متماثلہ $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ کے استعمال سے)

$$= \frac{(2x-3y)(2x-3y)}{(2x-3y)(2x+3y)}$$

$$= \frac{(2x-3y)}{(2x+3y)}$$ (مشترک اجزائے ضربی کاٹنے پر)

سوالنامہ۔14.3

1۔ مندرجہ ذیل عبارتوں کو تقسیم کیجئے۔

(a) $-2x^2yz$ کو $4xyz$ سے

(b) $-\frac{1}{2}xy$ کو $\frac{x}{2}$ سے

(c) $(3x^2)^5$ کو $(9x^2)^3$ سے

(d) $(7x^5)^2 \times (3y^5)^5$ کو $27y^3$ سے

(e) $8x^6y^6$ کو $-4x^6y^6$ سے

2۔ دیئے گئے کثیر رکنی کو یک رکنی سے تقسیم دیجئے۔

(a) $(5m^3 - 30m^2) \div 5m$ (b) $(12x^4 - 6x^2) \div (-3x^2)$

(c) $(5x^2 - 15x) \div (x - 3)$ (d) $(6x^4 + 9x^3 - 12x^2) \div 3x^2$

3۔ تقسیم دیجئے

(a) $(a^2 + 8a + 16) \div (a + 4)$ (b) $\{(a + b)^2\} - 4ab\} \div (a - b)^2$

(c) $(a^4 - b^4) \div (a^2 - ab)$ (d) $(x - 81) \div (x + 9)$

(e) $121x^2 + 16y^2 - 88xy \div 4y - 11x$

(f) $(x^2 - x - 30) \div (x - 6)$ (g) $\left[p^2 - p + \frac{1}{4}\right] \div \left\{p - \frac{1}{2}\right\}$

(h) $(x^2 - 5xy + 6y^2) \div (x - 2y)$ (i) $(27x^3 + 3x^2 - 2x + 8) \div (3x - 2)$

14.9 الجبرائی سوالات کے حل میں کچھ عام غلطیاں

الجبرائی سوالات جیسے۔ کثیر رکنی عبارتوں کے جوڑ، گھٹاؤ اور ضرب و تقسیم میں کچھ غلطیاں عام طور سے ہو جاتی ہیں۔ آیئے انہیں جان کر دور کریں۔

غلطی۔1 کلاس میں ایک طالب علم نے 2 میں x جوڑ کر حاصل جمع $2x$ معلوم کیا اور دوسرے نے $x + 2$ حاصل کیا۔ کس کا جواب صحیح ہے؟

ہمیں معلوم ہے کہ غیر یکساں (unlike) رکنوں کو آپس میں نہیں جوڑا جا سکتا۔ یکساں رکنوں کو چھانٹئے،

.... $5y,\ 31x,\ 5z,\ y,\ 2x$

$2x + 31x = ?$ $2 + x = ?$

اسلئے انکا حاصل جمع $2x$ نہیں ہوگا۔ اسکا صحیح حل ہوگا $x + 2$ یا $2 + x$

غلطی۔2 روبی کو $7x + x + 2x$ کا حاصل جمع $9x$ ہوا۔ کیا یہ صحیح ہے؟ کیا آپ روبی کے حل میں کی گئی غلطی بتا سکتے ہیں؟ عام طور سے x کا ضربی عدد 1 ہونے پر اسے نہیں لکھا جاتا ہے۔ اگر آپ $7x + 1x + 2x$ کو جوڑیں تو اسکا صحیح حل کیا ہوگا؟

غلطی۔3 سونم نے $x = -5$ کے لئے رکن $7x$ کی قیمت درج ذیل عمل سے حاصل کیا۔

$$7x = 7 - 5 = 2$$

کیا یہ عمل صحیح ہے؟

$7x$ کا مطلب ہے $7 \times x$ یہاں x کی قیمت میں 7 سے ضرب کیا جانا چاہئے لیکن برائیکٹ کا استعمال نہیں ہونے سے یہ گھٹانے کی ہدایت دیتا ہے۔ اگر ہم گھٹاؤ کے نشان کے ساتھ برائیکٹ کا استعمال کریں تو سونم کا صحیح حل

$$7\times(-5) = ?$$

غلطی۔4 یاسمین اور جوہی نے الجبرائی عبارتوں کا ضرب مندرجہ ذیل طریقوں سے کیا

	یاسمین	جوہی
(i)	$2(x-1) = 2x-1$	$2(x-1) = 2x-2$

اوپر $2(x-1)$ کے حل میں کس کا حل صحیح ہے؟ وجہ کے ساتھ بتائیے۔

ہاں آپ نے صحیح سوچا جوہی کا حل صحیح ہے۔

	یاسمین	جوہی
(ii)	$(3x)^2 = 9x^2$	$(3x)^2 = 3x^2$

اوپر دیئے گئے حل میں کس کا حل صحیح ہے۔ اور کیوں؟

جولی نے برائیکٹ کے سبھی متغیر اور غیر متغیر کا مربع نہیں کیا ہے۔ اس لئے حل غلط ہے؟

	یاسمین	جوہی
(iii)	$(3x-2)(x+1) = 3x^2-1$	$(3x-2)(x+1) = 3x^2+x-2$

یاسمین نے عبارت کے ہرایک رکن سے دوسری عبارت کے ہرایک رکن میں ضرب نہیں کیا ہے۔ اسلئے یاسمین کا حل غلط ہے۔

(iv)	$(2x+3)^2 = (4x+9)$	$(2x+3)^2 = (4x^2+12x+9)$

....

....

سوچئے

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

کے مطابق کس کا حل صحیح ہے۔

غلطی۔5 سنتوش اور امر کانت نے عبارتوں کی تقسیم مندرجہ ذیل طریقے سے کیا۔

سنتوش

$$\frac{2x+5}{5} = 2x+1$$

امر کانت

$$\frac{2x+5}{5} = \frac{2x}{5}+1$$

آپ جانتے ہیں تقسیم میں $\frac{8}{2} = 4$ جب ہم $\frac{8}{2} = 4$ میں کراس ضرب کرتے ہیں تو $8 = 8$ تب ہمیں برابر کے نشان کے دونوں طرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ اسلئے

$\frac{2x+5}{5} = 2x+1$ میں $2x + 5 = 5(2x + 1)$ کو حل کیجئے

اسی طرح $\frac{2x+5}{5} = \frac{2x}{5}+1$ میں

$2x+5 = 5\left(\frac{2x}{5}+5\right)$ کو حل کیجئے۔

غلطی۔6 رنکو نے x میں x سے ضرب کر کے $2x$ معلوم کیا۔ کیا اسکا حاصل ضرب صحیح ہے؟

تشریح۔ رنکو کا حاصل ضرب غلط ہے یہاں قوت نما کا اصول کام کرے گا اور یکساں متغیروں کے بیچ ضرب ہونے پر انکے قوت نما بد لینگے۔ اسلئے

$$x \times x = x^1 \times x^1 = x^{1+1} = x^2$$

غلطی۔7 رکنوں کے ضرب میں عام طور سے حاصل ضرب کے نشانات سے دھیان ہٹ جاتا ہے۔ جس سے کئی غلطیاں ہو جاتی ہیں۔

تشریح۔ رکنوں کے ضرب میں نشان متعین کرنے کے لئے ذیل کے اصولوں کا استعمال کیجئے۔

(i) (+ رکن) × (+ رکن) = + رکن

(ii) (+ رکن) × (− رکن) = − رکن

(iii) (− رکن) × (+ رکن) = − رکن

(iv) (− رکن) × (− رکن) = + رکن