S.S.A. 2014-15 (FREE)

باب۔1 قابلِ پیمائش اعداد (Rational Numbers)

تمہید: 1.1 ریاضی (حساب) میں اکثر ہمیں معمولی مساوات دکھائی دیتے ہیں۔ مساوات میں نا معلوم اور متغیر کی قیمت اعداد کے الگ الگ گروپ میں معلوم ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر سوچئے مساوات $x+5=8$ میں x کی کس قیمت سے مساوات مطمئن ہوگا؟

ذرا سوچئے کیا سبھی مساوات کے حل طبعی اعداد کے گروپ میں مل سکتے ہیں

$\therefore x=8-5$

یہاں مساوات کا حل $x=3$ ہے جو کہ ایک طبعی عدد ہے۔

سوچئے مساوات $x+10=10$ کا حل کیا ہوگا؟

یہاں مساوات کا حل $x=0$ ہے۔ x کی یہ قیمت ایک مکمّل عدد ہے، اگر ہم صرف طبعی اعداد تک محدود رہتے تو اِس مساوات کو حل نہیں جا سکتا ہے۔

آیئے اب ایک اور مساوات $x+15=7$ کے لئے x کی قیمت نکالیں۔ کیا مساوات $x+15=7$ جیسے مساوات کا حل مکمل اعداد (جو کہ صفر سے شروع ہو کر سب مثبت اعداد ہیں) میں ملتا ہے۔

یہاں $x=-8$، کیا x کی یہ قیمت ایک مکمّل عدد ہے؟ نہیں یہ ایک عدد صحیح (منفی مکمل اعداد) ہے۔

کچھ اور مساوات کے بارے میں غور کرتے ہیں۔ جیسے

(i) $4x=5$ (ii) $5x+8=0$

کیا آپ کو ان مساوات کے لئے x کی قیمت اعداد صحیح کے گروپ (مجموعہ) میں ملتا ہے؟
حل کر کے دیکھئے

مساوات (i) میں $x = \frac{5}{4}$ (ii) میں $\frac{-8}{5} = x$ رکھ کر دیکھئے۔ یہاں مساوات کو حل کرنے کے لئے ہمیں قابل پیائش اعداد کی ضرورت پڑتی ہے۔ ہم پچھلی جماعت میں قابلِ پیائش اعداد، کسروں اور دوسرے اعداد پر بنیادی اعمال (Basic operations) کو پڑھ چکے ہیں۔ یہاں ہم ان اعداد کے کچھ خصوصیات کھوجنے پر اعمال کی کوشش کریں گے۔

1.2 اعداد کی خصوصیات:

1.2.1 مربوطی اصول (Closure Law):

ایک بار پھر مختصر میں مکمل اعداد اور اعداد صحیح کی خاصیت کا تذکرہ کرتے ہیں۔

(i) مکمل اعداد (Whole Number):

23 اور 8,15 کس گروپ کے اعداد ہیں؟

(الف) جوڑ: 8+15=13

=14+7............. کیا یہ ایک مکمل عدد ہے؟

لہذا مکمل اعداد جوڑ کے تحت مربوط ہے۔ یعنی کسی دو مکمل اعداد a اور b کے لئے a+b ہمیشہ ایک مکمل عدد ہے

(ب) گھٹاؤ (تفریق): ....=3-7 6-4=2

...........=7-3 4-5=-1

سوچئے 4- , 1- کس عدد گروپ کا حصہ ہے

لہذا مکمل اعداد گھٹاؤ کے تحت مربوط نہیں ہے۔ کیونکہ ہر بار ہمیں مکمل عدد نہیں حاصل ہوتا ہے۔

(ج) ضرب: 0x4=0 ایک مکمل عدد ہے

3x5=15 ....=2x4

لہذا مکمل عدد ضرب کے تحت مربوط ہے۔ وسیع پیمانے پر اگر دو مکمل اعداد a اور b ہو تو ab بھی ایک مکمل عدد ہے۔

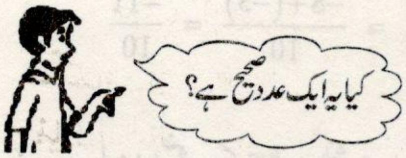
(د) تقسیم: $\frac{4}{5} = 5 \div 4$ یہ ایک مکمل عدد نہیں ہے۔ .... = 4 ÷ 2

لہذا مکمل اعداد تقسیم کے تحت مربوط نہیں ہے۔ .... = 2 ÷ 4

خود کر کے دیکھئے:

- الگ الگ مکمل اعداد لے کر چاروں اعمال کے لئے مربوطی صفت کی تصدیق کیجئے۔
- طبعی اعداد کے لئے بھی چاروں اعمال کے تحت مربوطی صفت کی جانچ کیجئے۔

(ii) اعداد صحیح (Integers):



(الف) جوڑ: -8+5=-3 8+7=.........

-7+(-4)=-11 (-9)+2=.........

لہذا اعداد صحیح جوڑ کے تحت مربوط ہے۔

وسیع پیمانے پر کسی دو اعداد صحیح a اور b کے لئے a+b ایک عدد صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق): 12-7=5 ایک عدد صحیح ہے۔ (-9)-2=.........

7-12=-5 ایک عدد صحیح ہے۔ -4-5=.........

لہذا اعداد صحیح گھٹاؤ کے تحت مربوط ہے۔ وسیع پیمانے پر کسی دو اعداد صحیح a اور b کے لئے a-b ایک عدد صحیح ہے۔

(ج) ضرب: 5x18=90 ایک عدد صحیح ہے۔ -5x-4=.........

-8 x 5 = -40 ایک عدد صحیح ہے۔ 3x7=.........

لہذا اعداد صحیح ضرب کے لئے مربوط ہے۔

وسیع پیمانے پر کسی دو اعداد صحیح a اور b کے لئے ab بھی ایک مکمل عدد ہے۔

(د) تقسیم: $4 \div 5 = \frac{4}{5}$ یہ ایک عدد صحیح نہیں ہے۔ لہذا اعداد صحیح تقسیم کے تحت مربوط نہیں ہے۔

سوچئے: 5 قابل پیمائش اعداد کے گروپ کا ایک ممبر کیوں ہے؟

(iii) قابل پیمائش اعداد (Rational Number):

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ ایسا عدد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ہو یا ظاہر کیا جا سکے، قابل پیمائش عدد کہلاتا ہے۔ جہاں p اور q عدد صحیح ہے اور $q \neq 0$ ہے جیسے $\frac{-7}{12}$, $\frac{3}{5}$, -5, 0 وغیرہ۔

کیونکہ اعداد 7, -5, 0 وغیرہ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اِس لئے یہ بھی قابل پیمائش اعداد ہیں۔

آیئے قابل پیمائش اعداد میں مربوطی (Closure) صفت کو جانچیں:

(الف) جوڑ: $\frac{-2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{-4+5}{6} = \frac{1}{6}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

$\frac{-2\text{x}2}{3\text{x}2} = \frac{-4}{6}$

یہ مساوی کسر ہے

$\frac{-4}{5} + \left(\frac{-3}{10}\right) = \frac{-8+(-3)}{10} = \frac{-11}{10}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

لہٰذا واضح ہے کہ قابل پیمائش اعداد جوڑ کے تحت مربوط ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق):

$\frac{8}{3} - \frac{5}{6} = \frac{16-5}{6} = \frac{11}{6}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

$\frac{-7}{8} - \frac{5}{4} = \frac{-7-10}{8} = \frac{-17}{8}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

$\frac{5}{2} - \left(\frac{-7}{8}\right) = ...$ (کیا یہ ایک قابل پیمائش عدد ہے؟)

اس طرح ہم پاتے ہیں کہ قابل پیمائش عدد گھٹاؤ کے تحت مربوط ہے۔ یعنی کسی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے a-b بھی ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

(ج) ضرب:

$\frac{-4}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{-32}{15}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے

$\frac{-8}{7} \times \frac{-2}{5} = \frac{16}{35}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے

$\frac{-2}{3} \times \frac{-3}{5} = ...$ کیا (کیا ان کا بھی حل ایک قابل پیمائش عدد ہے؟)

واضح ہے کہ قابل پیمائش اعداد ضرب کے تحت مربوط ہے۔ یعنی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے axb بھی ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

(د) تقسیم:

$\frac{-5}{4} \div \frac{5}{3} = \frac{-5}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{-15}{20}$ ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

$\frac{15}{7} \div \frac{2}{5} = ...?$ کیا؟ (کیا ان کا حل ایک قابل پیمائش عدد ہے؟)

لہٰذا واضح ہے کہ قابل پیمائش اعداد تقسیم کے تحت مربوط ہے۔

یعنی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے a ÷ b بھی ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

$\frac{1}{2}$ میں $\frac{1}{2}$ کتنی بار = 1 بار ، $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = ?$

یا $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = 1$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی قابل پیمائش عدد a کے لئے $a \div 0$ لایعنی (Undefined) ہے۔ لہذا قابل پیمائش اعداد تقسیم کے تحت مربوط نہیں ہے۔ اگر ہم صفر کو شامل نہیں کریں تو بقیہ سبھی قابل پیمائش اعداد کا مجموعہ تقسیم کے تحت مربوط ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

مندرجہ ذیل جدول میں خالی جگہوں کو ہاں/نہیں سے بھریں:

اعداد	جوڑ	گھٹاؤ	ضرب	تقسیم
		کے تحت مربوط ہے		
قابل پیمائش اعداد	ہاں	....	....	....
اعداد صحیح	....	....	ہاں	....
مکمل اعداد	....	....	....	....
طبعی اعداد	....	نہیں	....	....

1.2.2 ترتیب تبادلہ کا اصول (Commutative Law):

(i) مکمل اعداد (Whole Number):

(الف) جوڑ: $5+7=12$ $3+8=11$ $0+6=$.........

$7+5=12$ $8+3=11$ $6+0=$.........

لہذا دو مکمل اعداد کے لئے جوڑ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔

بڑے پیمانے پر، دو مکمل اعداد a اور b کے لئے $a+b=b+a$ صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق): $8-2=6$ $4-6=$........

$2-8=-6$ $6-4=$.........

$$\Rightarrow 8-2 \neq 2-8$$

لہذا دو مکمل اعداد کے لئے گھٹاؤ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی دو مکمل اعداد a اور b کے لئے $a-b \neq b-a$ ہوتا ہے۔

(ج) ضرب: $5 \times 3 =$ .... $4 \times 6=$.......

$3 \times 5=15$ $6 \times 4=24$

لہذا دو مکمل اعداد کے لئے ضرب کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔

$5\times0=$ .... اور $0\times5=$ .... کیا یہ ترتیب تبادلہ اصول کی تعمیل کرتے ہیں؟

یعنی دو مکمل اعداد a اور b کے لئے axb=bxa ضرب کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔

(د) تقسیم: $4 \div 5 = \frac{4}{5}$ اور $5 \div 4 = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow 4 \div 5 \neq 5 \div 4$

کیا $\frac{4}{5} = \frac{5}{4}$؟

لہذا دو مکمل اعداد کے لئے تقسیم کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی دو مکمل اعداد a اور b کے لئے

$a \div b \neq b \div a$ ہوتا ہے۔

کیا یہ برابر ہے؟

(ii) اعداد صحیح (Integers):

(الف) جوڑ: $(-5)+(+4)=-1$ (i) $(5)+(-4)=$.........

پھر $(+4)+(-5)=-1$ $(-4)+(5)=$..........

لہذ $(-5)+(+4)=(+4)+(-5)$ (ii) $(-3)+(-7)=$...........

$(-7)+(-3)=$...........

لہذا دو اعداد صحیح کے لئے جوڑ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔ یعنی دو اعداد صحیح a اور b کے لئے a+b=b+a صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق): اعداد صحیح کے گھٹاؤ کے لئے غور کرتے ہیں۔ کوئی بھی دو اعداد صحیح لیجئے اور انہیں گھٹایئے۔

$(-8)-(+3)=-11$ (i) $7-(-3)=$ ....

پھر $(3)-(-8)=11$ $(-3)-(7)=$..........

لہذا دو اعداد صحیح کے لئے گھٹاؤ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی دو اعداد صحیح a اور b کے لئے

$a-b \neq b-a$ ہوتا ہے۔

(ج) ضرب: $(-4)\times(+5)=-20$ $8\times(-2)=$..........

پھر $(+5)\times(-4)=-20$ $(-2)\times8=$..........

لہذا $(-4)\times(+5)=(+5)\times(-4)$

لہذا دو اعداد صحیح کے لئے ضرب کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔ یعنی دو مکمل اعداد a اور b کے لئے axb=bxa صحیح ہے۔

6÷2=................

2÷6=.................

-3÷1=.............

1÷(-3)=...........

(د) تقسیم: $(-5) \div (+2) = \frac{-5}{+2} = -\frac{5}{2}$

$$(+2) \div (-5) = \frac{(+2)}{-5} = -\frac{2}{5}$$

لہذا $-5 \div 2 \neq 2 \div (-5)$

اِس لئے دو اعداد صحیح کے لئے تقسیم کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی a اور b کے لئے

$a \div b \neq b \div a$ ہوتا ہے۔

(iii) قابل پیمائش اعداد (Rational Number):

(الف) جوڑ: $\frac{-5}{4} + \frac{7}{8} = \frac{7}{8} + \left(\frac{-5}{4}\right) =$

$$\frac{-10+7}{8} = \frac{-3}{8} \qquad = \frac{7+(-10)}{8} = \frac{-3}{8}$$

لہذا $\frac{-5}{8} + \frac{-13}{6} = \frac{-13}{6} + \frac{-5}{8}$

پھر ایک دوسری مثال لیتے ہیں:

$$\left(\frac{-5}{8}\right) + \left(\frac{-13}{6}\right) = \frac{-15+(-52)}{24} = \frac{-15-52}{24} = \frac{-67}{24}$$

اب $\left(\frac{-13}{6}\right) + \left(\frac{-5}{8}\right) = \frac{-52+(-15)}{24} = \frac{-52-15}{24} = \frac{-67}{24}$

لہذا $\frac{-5}{8} + \frac{-13}{6} = \frac{-13}{6} + \frac{-5}{8}$

لہذا واضح ہے کہ دو قابل پیمائش اعداد کے لئے جوڑ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔ یعنی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے $a+b=b+a$ صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق):

$$\frac{5}{4} - \left(\frac{-7}{16}\right) = \frac{20-(-7)}{16} = \frac{20+7}{16} = \frac{27}{16}$$

ترتیب بدلنے پر $\frac{-7}{16} - \frac{5}{4} = \frac{-7-20}{16} = \frac{-27}{16}$

لہذا $\frac{5}{4} - \left(\frac{-7}{16}\right) \neq \frac{-7}{16} - \frac{5}{4}$

اِس لئے قابل پیمائش اعداد کے لئے گھٹاؤ کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔

(ج) ضرب: $\frac{-4}{9} \times \frac{5}{6} = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \frac{-6}{5} \times \frac{-3}{7} = \frac{18}{35}$

$\frac{5}{6} \times \frac{-4}{9} = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \frac{-3}{7} \times \frac{-6}{5} = \frac{18}{35}$

لہذا $\frac{-6}{5} \times \frac{-3}{7} = \frac{-3}{7} \times \frac{-6}{5}$

کیا $\frac{-4}{9} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{-4}{9}$?

لہذا قابل پیمائش اعداد کے لئے ضرب کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح ہے۔یعنی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے axb=bxa صحیح ہے۔

(د) تقسیم: $\frac{-4}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{-4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{-28}{15}$

$\frac{3}{7} \div \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{3}{7} \times \left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{-15}{28}$

$\frac{-4}{5} \div \frac{3}{7} \neq \frac{3}{7} \div \left(\frac{-4}{5}\right)$

کیا $\frac{5}{7} \div \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \div \frac{5}{7}$ ہے؟	حل کر کے دیکھئے

لہذا قابل پیمائش اعداد صحیح کے لئے تقسیم کا ترتیب تبادلہ اصول صحیح نہیں ہے۔یعنی دو قابل پیمائش اعداد a اور b کے لئے $a \div b \neq b \div a$ ہوتا ہے۔

خود کرکے دیکھئے:

درج ذیل جدول (Table) کو ترتیب تبادلہ اصول کے لئے پورا کیجئے۔

اعداد	جوڑ کے	گھٹاؤ کے	ضرب کے	تقسیم کے
قابل پیمائش اعداد	ہاں			
اعداد صحیح		نہیں		
مکمل اعداد				
طبعی اعداد				

جدول (Table) کو دیکھ کر بتاؤ کن عملیات میں ترتیب تبادلہ اصول لاگو ہوتا ہے؟

1.2.3 معاونت کا اصول (Associative Law):

(i) مکمل اعداد (Whole Number):

(الف) جوڑ: (5+4)+6=9+......=......... معاونت بدلنے پر.... 5+(4+6)=5+........=

لہذا (5+4)+6=5+(4+6)

اِس لئے تین مکمل اعداد کے لئے جوڑ کا معاونت اصول صحیح ہے۔ یعنی تین مکمل اعداد a,b اور c کے لئے (a+b)+c= a+(b+c) صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق): کیا........... ~~5~~-(1-)=(8-7)-5=(7-8)-5

7-(8-5) = 7-3 = 4

لہذا (7-8)-5≠ 7-(8-5)

اِس لئے تین مکمل اعداد کے لئے گھٹاؤ کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی تین مکمل اعداد a,b اور c کے لئے (a-b)-c.....a-(b-c) ہوتا ہے۔

(ج) ضرب: .... =(5x4)x6=(.....)x6 اور 5x(4x6)=5x24=.......

لہذا (5x4)x6=5x(4x6)

اسی طرح، کیا 5x(4x0)=(5x4)x0?

اِس لئے تین مکمل اعداد کے لئے ضرب کا معاونت اصول صحیح ہے۔

یعنی تین مکمل اعداد a, b اور c کے لئے (axb)xc=ax(bxc) ہوتا ہے۔

(د) تقسیم: $(4\div5)\div 8 = \frac{4}{5}\div 8 = \frac{4}{5}\times\frac{1}{8} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

معاونت بدلنے پر

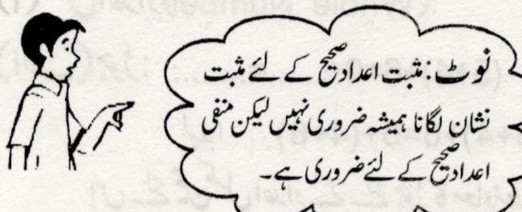
$$4\div(5\div8) = 4\div\left(\frac{5}{8}\right) = 4\times\frac{8}{5} = \frac{32}{5}$$

لہذا $(4\div5)\div8 \neq 4\div(5\div8)$

اِسے بھی جانچئے کیا ؟ 12 ÷(4 ÷ 2) = (12 ÷ 4) ÷ 2 ......

اِس لئے تین مکمل اعداد کے لئے تقسیم کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔ مکمل اعداد a، b اور c کے لئے (a ÷ b) ÷ c a ÷ (b ÷ c) ہوتا ہے۔

(ii) اعداد صحیح



(الف) جوڑ: تین اعداد صحیح (-5)، (+4) اور (-2) کے لئے

(-5+4)+(-2)}=-1+(-2)=-3

-5+{4+(-2)=-5+2=-3

اس لئے (-5+4)+(-2)=-5+{4+(-2)}

اِس لئے تین اعداد صحیح کے لئے جوڑ کا معاونت اصول صحیح ہے۔ یعنی تین اعداد صحیح a, b اور c کے لئے (a+b)+c=a+(b+c) صحیح ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق): پھر اعداد صحیح 5-، 4+ اور 6- کے گھٹاؤ کے لئے

(-5-4)-(-6)=-9+6=-3

-5-{4-(-6)}=-5-{4+6}=-5-10=-15

اس لئے (-5-4)-(-6)≠-5{4-(-6)}

لہذا تین اعداد صحیح کے لئے گھٹاؤ کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی تین اعداد صحیح a، b اور c کے لئے (a-b)-c≠a-(b-c) گھٹاؤ کا معاونت اصول لاگو (نافذ) نہیں ہے۔

(ج) ضرب: $\{5\times(-4)\}\times(-2)=-20\times(-2)=40$

$5\times\{-4\times(-2)\}=5\times\{8\}=40$

اس لئے $\{5\times(-4)\}\times(-2)=5\times\{-4\times(-2)\}$

لہذا تین اعداد صحیح کے لئے ضرب کا معاونت اصول صحیح ہے۔ یعنی تین اعداد صحیح a، b اور c کے لئے $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ ضرب کا معاونت اصول لاگو (نافذ) ہے۔

(د) تقسیم: $-5 \div \{2 \div (-3)\}$ $\qquad$ $(-5 \div 2) \div (-3)$

$$= -5 \div \left\{\frac{2}{-3}\right\} = -5 \times \frac{-3}{2} = \frac{15}{2} \qquad = \frac{-5}{2} \times \frac{1}{-3} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow (-5 \div 2) \div (-3) \neq -5 \div \{2 \div (-3)\}$$

اِس لئے تین اعداد صحیح کے لئے تقسیم کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔ یعنی تین اعداد صحیح a,b اور c کے لئے $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ تقسیم کا معاونت اصول لاگو (نافذ) نہیں ہے۔

(iii) قابل پیمائش اعداد (Rational Number):

(الف) جوڑ: $\frac{-5}{4}+\left(\frac{3}{8}+\frac{-7}{6}\right)$ $\qquad$ $\left(\frac{-5}{4}+\frac{3}{8}\right)+\frac{-7}{6}$

$$= \frac{-5}{4}+\left(\frac{9-28}{24}\right) \qquad = \left(\frac{-10+3}{8}\right)+\frac{-7}{6}$$

$$= \frac{-5}{4}+\frac{-19}{24} \qquad = \frac{-7}{8}+\frac{-7}{6}$$

$$= \frac{-30-19}{24} \qquad = \frac{-21+(-28)}{24}$$

$$= \frac{-49}{24} \qquad = \frac{-49}{24}$$

اِس لئے $\left[\frac{-5}{4}+\frac{3}{8}\right]+\frac{-7}{6}=\frac{-5}{4}+\left[\frac{3}{8}+\frac{-7}{6}\right]$

کیا $\frac{-1}{3}+\left[\frac{2}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\left(\frac{-1}{3}\right)+\frac{2}{5}\right]+\left(\frac{-1}{2}\right)$? کرکے دیکھئے۔

اِس لئے تین قابل پیمائش اعداد کے لئے جوڑ کا معاونت اصول صحیح ہے۔یعنی تین قابل پیمائش اعداد a، b اور c کے لئے (a+b)+c=a+(b+c) جوڑ کا معاونت اصول لاگو (نافذ) ہے۔

(ب) گھٹاؤ (تفریق):

$$\frac{-3}{8}-\left(\frac{5}{4}-\frac{-2}{6}\right)$$
$$=\frac{-3}{8}-\left(\frac{15+4}{12}\right)$$
$$=\frac{-3}{8}-\frac{19}{12}$$
$$=\frac{-9-38}{24}$$
$$=\frac{-47}{24}$$

$$\left(\frac{-3}{8}-\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{-2}{6}\right)$$
$$=\left(\frac{-3-10}{8}\right)-\left(\frac{-2}{6}\right)$$
$$=\frac{-13}{8}-\frac{-2}{6}$$
$$=\frac{-39-(-8)}{24}$$
$$=\frac{-31}{24}$$

لہذا $\left(\frac{-3}{8}-\frac{5}{4}\right)-\frac{-2}{6}\neq\frac{-3}{8}-\left(\frac{5}{4}-\frac{-2}{6}\right)$

اِس لئے قابل پیمائش اعداد کے لئے گھٹاؤ کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔یعنی تین قابل پیمائش اعداد a، b اور c کے لئے (a-b)-c≠ a-(b-c) گھٹاؤ کا معاونت اصول لاگو (نافذ) نہیں ہوتا ہے۔

(ج) ضرب: آیئے ہم ضرب کے لئے معاونت اصول کی جانچ کرتے ہیں۔

$$\frac{-5}{8}\times\left(\frac{7}{6}\times\frac{-2}{5}\right)$$
$$=\frac{-5}{8}\times\frac{-14}{30}$$
$$=\frac{70}{240}$$

$$\left(\frac{-5}{8}\times\frac{7}{6}\right)\times\frac{-2}{5}$$
$$=\frac{-35}{48}\times\frac{-2}{5}$$
$$=\frac{70}{240}$$

اس لئے $\left(\frac{-5}{8}\times\frac{7}{6}\right)\times\frac{-2}{5}=\frac{-5}{8}\times\left(\frac{7}{6}\times\frac{-2}{5}\right)$

کیا $\left(\frac{10}{7} \times \frac{-5}{14}\right) \times \frac{3}{14} = \frac{10}{7} \times \left(\frac{-5}{14} \times \frac{3}{14}\right)$ ہے؟

لہذا ہم پاتے ہیں کہ قابل پیمائش اعداد کے لئے ضرب کا معاونت اصول صحیح ہے۔ تین قابل پیمائش اعداد a،b اور c کے لئے (axb)xc=ax(bxc)

ضرب کا معاونت اصول لاگو (نافذ) ہوتا ہے۔

(د) تقسیم:

$$\left(\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{-5}{8}$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\right) \div \frac{-5}{8}$$
$$= \frac{4}{6} \times \frac{8}{-5} = \frac{32}{-30} = \frac{-32}{30}$$

$$\frac{1}{2} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{-5}{8}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{8}{-5}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \div \frac{24}{-20} = \frac{1}{2} \times \frac{-20}{24} = \frac{-20}{48}$$

اِس لئے $\left(\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{-5}{8} \neq \frac{1}{2} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{-5}{8}\right)$

لہذا قابل پیمائش اعداد کے لئے تقسیم کا معاونت اصول صحیح نہیں ہے۔ اِس لئے قابل پیمائش اعداد a،b اور c کے لئے (a ÷ b) ÷ c ≠ a ÷ (b ÷ c) تقسیم کا معاونت اصول لاگو (نافذ) نہیں ہے۔

خود کر کے دیکھیے۔

درج ذیل جدول (Table) کو پورا کریں۔ (✓) لگائیں:

اعداد	معاونت کے اصول کے لئے صحیح ہے			
	جوڑ کے	گھٹاؤ کے	ضرب کے	تقسیم کے
قابل پیمائش				
مکمل اعداد				
اعداد صحیح				
طبعی اعداد				

1.2.4: صفر(0) کا کردار (The role of Zero):

ذیل پر غور کریں

(صفر کا مکمل عدد میں جوڑ) $5+0=0+5=5$

(صفر کا عدد صحیح میں جوڑ) $-5+0=0+(-5)=-5$

(صفر کا قابل پیمائش عدد میں) $\frac{-5}{4}+0=0+\frac{-5}{4}=\frac{-5}{4}$

درج بالا مثالوں سے ظاہر ہے کہ کسی مکمل عدد، عدد صحیح اور قابل پیمائش عدد میں جب صفر جوڑا جاتا ہے تو حاصل جمع پھر سے وہی عدد حاصل ہوتا ہے۔

وسیع پیمانے پر

$a+0=0+a=a$، جہاں a ایک مکمل عدد ہے

$b+0=0+b=b$ ، جہاں b ایک عدد صحیح ہے

$c+0=0+c=c$، جہاں c ایک قابل پیمائش عدد ہے۔

اِس طرح درج بالا سبھی اعداد کے جوڑ کے لئے صفر ایک جمعی شناخت (Additive identity) کہلاتا ہے۔

1.2.5 ایک (1) کا کردار (The role of1):

(مکمل عدد کا 1 کے ساتھ ضرب) $8\times1=1\times8=8$

(عدد صحیح کا 1 کے ساتھ ضرب) $-2\times1=1\times(-2)=-2$

(قابل پیمائش عدد کا 1 کے ساتھ ضرب) $\frac{-3}{5}\times1=1\times\frac{-3}{5}=\frac{-3}{5}$

درج بالا مثالوں سے ظاہر ہے کہ کسی مکمل عدد، عدد صحیح اور قابل پیمائش عدد میں جب اسے ضرب کیا جاتا ہے تو حاصل ضرب پھر سے وہی عدد حاصل ہوتا ہے۔ اِس طرح 1 ایک **ضربی شناخت** (Multiplicative identity) ہے۔

1.2.6: جمعی معکوس (Additive inverse):

اعداد صحیح کا مطالعہ کرتے وقت آپ نے اعداد صحیح کے منفی پاتے ہیں۔ 1 کا منفی کیا ہے؟ یہ 1- ہے کیونکہ $1+(-1)=(-1)+1=0$ اِسلئے (1-) کا منفی کیا ہوگا؟ یہ 1 ہوگا۔

اِسی طرح $2+(-2)=(-2)+2=0$

$$\frac{3}{2} + \left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{3}{2} = 0$$

اوپر کے مثالوں میں دونوں اعداد کا جوڑ صفر ہے۔ جب دو اعداد کا جوڑ صفر ہو تو وہ دونوں اعداد ایک دوسرے کے جمعی معکوس (Additive Inverse) ہوتے ہیں۔ جیسا کہ اوپر کے مثال میں 1 کا جمعی معکوس 1- اور 1- کا جمعی معکوس 1 ہے۔

وسیع پیمانے پر

آپ بتائیے: 2 کا جمعی معکوس کیا ہے؟
5 کا جمعی معکوس کیا ہے؟

کسی بھی قابل پیمائش اعداد $\frac{c}{d}$ کے لئے: $\frac{c}{d} + \left(\frac{-c}{d}\right) = \left(\frac{-c}{d}\right) + \frac{c}{d} = 0$

اِس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\frac{c}{d}$ کا جمعی معکوس $\frac{-c}{d}$ اور $\frac{-c}{d}$ کا جمعی معکوس $\frac{c}{d}$ ہے۔

1.2.7 ضربی معکوس (Multiplicative Invers or Reciprocal):

درج ذیل مثالوں پر غور کریں:

(i) $2 \times \frac{1}{2} = 1$ (ii) $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ (iii) $\frac{-5}{2} \times \frac{2}{-5} = 1$

مندرجہ بالا مثالوں میں ہر ایک کا حاصل ضرب 1 ہے۔ جب دو اعداد کا حاصل ضرب 1 ہو تو وہ دونوں اعداد ایک دوسرے کا ضربی معکوس (Mulitiplicative Inverse or Reciprocal) کہلاتا ہے۔ جیسے 2 کا ضربی معکوس $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ کا ضربی معکوس 2 ہے۔ اِسی طرح $\frac{-5}{2}$ کا ضربی معکوس $\frac{2}{-5}$ ہے۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ صفر کا ضربی معکوس کیا ہے۔؟ کیا کوئی ایسا عدد ہے جیسے صفر سے ضرب کرنے پر 1 حاصل ہو جائے؟ اِس لئے صفر کا کوئی ضربی معکوس نہیں ہے۔

اِس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک قابل پیمائش عدد $\frac{a}{b}$، دوسرے قابل پیمائش عدد $\frac{b}{a}$ کا ضربی معکوس کہلاتا ہے۔ اگر $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$ ہے۔

اِس طرح کے چند ضربی معکوس لکھئے۔

1.2.8 قابل پیمائش اعداد کے لئے جوڑ پر ضرب کا بنٹن:

(Distributivity of multiplication over addition for rational numbers)

درج ذیل پر غور کریں:

$$\frac{-2}{5} \times \left\{\frac{2}{7}+\frac{5}{14}\right\} = \left(\frac{-2}{5}\times\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{-2}{5}\times\frac{5}{14}\right) = \frac{-4}{35} + \frac{-10}{70} = \frac{-8+(-10)}{70} = \frac{-18}{70}$$

$$\frac{-2}{5} \times \left\{\frac{2}{7}+\frac{5}{14}\right\} = \frac{-2}{5} \times \left\{\frac{4+5}{14}\right\} = \frac{-2}{5} \times \frac{9}{14} = \frac{-18}{70}$$

اس لئے $\frac{-2}{5} \times \left\{\frac{2}{7}+\frac{5}{14}\right\} = \left(\frac{-2}{5}\times\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{-2}{5}\times\frac{5}{14}\right)$

اس مثال میں گھٹاؤ پر ضرب کا تقسیم سمجھئے۔

بنٹن اصول سے

$$\frac{-4}{5} \times \left\{\frac{2}{9}-\frac{7}{18}\right\} = \left(\frac{-4}{5}\times\frac{2}{9}\right) - \left(\frac{-4}{5}\times\frac{7}{18}\right) = \frac{-8}{45} - \frac{-28}{90} = \frac{-16+20}{90} = \frac{12}{90}$$

سیدھے طریقے سے

$$\frac{-4}{5} \times \left\{\frac{2}{9}-\frac{7}{18}\right\} = \frac{-4}{5} \times \left\{\frac{4-7}{18}\right\} = \frac{-4}{5} \times \frac{-3}{18} = \frac{12}{90}$$

اِس لئے $\frac{-4}{5} \times \left\{\frac{2}{9}-\frac{7}{18}\right\} = \left(\frac{-4}{5}\times\frac{2}{9}\right) - \left(\frac{-4}{5}\times\frac{7}{18}\right)$

اِس لئے مندرجہ بالا مثالوں سے ظاہر ہے کہ قابل پیمائش اعداد کے لئے جوڑ اور گھٹاؤ پر ضرب کا بنٹن اصول صحیح ہے۔

سبھی قابل پیمائش اعداد a,b اور c کے لئے

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

خود کیجئے:

بنٹن اصول کی مدد سے مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کریں:

(i) $\left(\frac{5}{4}\times\frac{-2}{8}\right) + \left(\frac{5}{4}\times\frac{-3}{5}\right)$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\times\frac{-3}{7}\right) + \left(\frac{5}{8}\times\frac{-7}{6}\right)$

مثال 1: $\frac{5}{12} + \frac{-3}{8} + \frac{-7}{16} + \frac{25}{12}$ قیمت معلوم کریں۔

حل

$$= \frac{5}{12} + \frac{-3}{8} + \frac{-7}{16} + \frac{25}{12}$$

$$= \frac{-3}{8} + \frac{-7}{16} + \frac{5}{12} + \frac{25}{12}$$

$$= \left[\frac{-3}{8}+\frac{-7}{16}\right] + \left[\frac{5}{12}+\frac{25}{12}\right]$$ (ترتیب تبادلہ اصول سے)

$$= \left[\frac{5+25}{12}\right] + \left[\frac{-6+(-7)}{16}\right]$$

$$= \frac{30}{12} + \frac{-13}{16} = \frac{120-39}{48} = \frac{\overset{27}{\cancel{81}}}{\underset{16}{\cancel{48}}} = \frac{27}{16}$$

مثال 2، حل کریں: $\frac{-4}{5} \times \frac{16}{7} + \frac{-3}{5} \times \frac{16}{7}$

حل: $\frac{-4}{5} \times \frac{16}{7} + \frac{-3}{5} \times \frac{16}{7}$

$$= \frac{16}{7}\left(\frac{-4}{5}+\frac{-3}{5}\right)$$ (بنٹن اصول سے)

$$= \frac{16}{7}\left(\frac{-43+(-\ )}{5}\right) = \frac{16}{7} \times \frac{-7}{5}$$

$$= \frac{-16}{5}$$

مثال3: مندرجہ ذیل کا جمعی معکوس لکھئے:

(i) $\frac{-9}{13}$ (ii) $\frac{12}{25}$

حل: (i) $\frac{-9}{13}$ کا جمعی معکوس $\frac{9}{13}$ ہے۔ کیونکہ

$$\frac{-9}{13} + \frac{9}{13} = \frac{-9+9}{13} = \frac{0}{13} = 0$$

(ii) $\frac{12}{25}$ کا جمعی معکوس ہے $\frac{-12}{25}$ کیونکہ

$$\frac{12}{25} + \frac{-12}{25} = \frac{12-12}{25} = \frac{0}{25} = 0$$

مثال4: حل کریں $\frac{2}{7} \times \frac{-3}{5} - \frac{1}{12} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$

حل: $\frac{2}{7} \times \frac{-3}{5} - \frac{1}{12} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$

$$= \frac{2}{7} \times \frac{-3}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{-3}{5}\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\right) - \frac{1}{12}$$ (بنٹن اصول سے)

$$= \frac{-3}{5}\left(\frac{2+4}{7}\right) - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{-3}{5} \times \frac{6}{7} - \frac{1}{12} = \frac{-18}{35} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{-216-35}{420} = \frac{-251}{420}$$

سوالنامہ۔1.1

1. مندرجہ ذیل میں سے ہرایک کا جمعی معکوس لکھئے:

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{25}{9}$ (iii) -16 (iv) $\frac{-15}{8}$

(v) 0 (vi) $\frac{-5}{-7}$ (vii) $\frac{13}{-5}$ (viii) $\frac{-2}{15}$

2. مندرجہ ذیل جدول کے خالی جگہوں کو پُر کیجئے:

عدد	-13	$\frac{-5}{-8}$	$\frac{4}{-7}$	$\frac{5}{4}$	-1
ضربی معکوس	$\frac{1}{-13}$	....	....	....	....

3. مناسب خاصیت کی مدد سے ذیل کی قیمت معلوم کیجئے:

(i) $\frac{4}{3} + \frac{3}{5} + \frac{-2}{3} + \frac{-11}{5}$

(ii) $\frac{2}{5} \times \left(-\frac{3}{7}\right) - \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{14} \times \frac{2}{5}$

4. $\frac{5}{18}$ کو $\frac{-7}{72}$ کے ضربی معکوس سے ضرب کیجئے۔

5. $\frac{-1}{3} \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{-1}{3}\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{3}\times\frac{1}{4}\right)$ میں کون سی خاصیت ہے؟ بتائیے۔

6. $-1\frac{1}{8}$ کا ضربی معکوس $\frac{8}{9}$ ہے؟ وجہ سمیت جواب دیجئے۔

7. کیا $3\frac{1}{3}$ کا ضربی معکوس 0.3 ہے؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

8. مندرجہ ذیل کو بنٹن اصول کی مدد سے حل کیجئے:

(i) $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\}$ (ii) $\frac{5}{6} \times \left(\frac{-2}{5} + \frac{3}{10}\right)$

9. مندرجہ ذیل کالم 'الف' کو کالم 'ب' کے مناسب اصول سے ملائیں:

کالم 'الف' مثال		کالم 'ب' اصول
(i) $\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)$	(a)	جمعی شناخت
(ii) $\frac{5}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{6}$	(b)	ضربی شناخت
(iii) $\left(\frac{-1}{2} + \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{10} = \frac{-1}{2} + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\right)$	(c)	ضرب کا معاونت اصول
(iv) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$	(d)	جمعی معکوس
(v) $\left(5 \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{4} = 5 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right)$	(e)	بنٹن اصول
(vi) $\frac{-5}{4} + 0 = \frac{-5}{4}$	(f)	مربوطی اصول
(vii) $\frac{-8}{3} \times 1 = \frac{-8}{3}$	(g)	ضربی معکوس
(viii) $\frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{5}{2} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{2} \times \frac{2}{5}\right)$	(h)	جوڑ کا معاونت اصول
(ix) $\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = 1$	(i)	ضرب کا ترتیب تبادلہ اصول
(X) $\frac{-7}{4} + \frac{7}{4} = 0$	(j)	جوڑ کا ترتیب تبادلہ اصول

ہم نے سیکھا

1. اعداد کے خاندان میں پہلا طبعی اعداد (...........,1,2,3,4,5) ہے۔ طبعی اعداد کے خاندان میں صفر(0) شامل کرنے پر مکمل اعداد (...........,0,1,2,3,4,5) کا خاندان بنتا ہے۔ مکمل اعداد کے خاندان میں منفی اعداد (.........,3-,2-,1-) کو شامل کرنے پر اعداد صحیح بنتا ہے۔ اعداد صحیح کے خاندان میں کسر اعداد کو شامل کرنے پر قابل پیائش اعداد بنتا ہے۔

2. قابل پیائش اعداد جوڑ، گھٹاؤ، ضرب اور تقسیم کے عملیات کے تحت مربوط ہیں۔

3. قابل پیائش اعداد کے لئے جوڑ اور ضرب کے عملیات (1) ترتیب تبادلہ اور (ii) معاونتی ہیں۔

4. قابل پیائش اعداد کے لئے قابل پیائش عدد صفر (0) جمعی شناخت ہے۔

5. قابل پیائش اعداد کے لئے قابل پیائش عدد ایک (1) ضربی شناخت ہے۔

6. قابل پیائش عدد $\frac{a}{b}$ کا جمعی معکوس $-\frac{a}{b}$ ہے اور اس کا معکوس بھی صحیح ہے۔

7. اگر $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$ تو قابل پیائش عدد $\frac{a}{b}$ کا ضربی معکوس $\frac{c}{d}$ ہے۔

8. قابل پیائش اعداد کا بنٹن اصول:

قابل پیائش اعداد a,b اور c کے لئے

(i) a (b + c) = ab + ac

(ii) a (b - c) = ab - ac

9. ریاضی عملیات میں صفتوں کا استعمال کرنا۔