

अध्याय - 4

आँकड़ों का प्रबंधन

(DATA MANAGEMENT)

4.1 सूचनाओं की खोज में

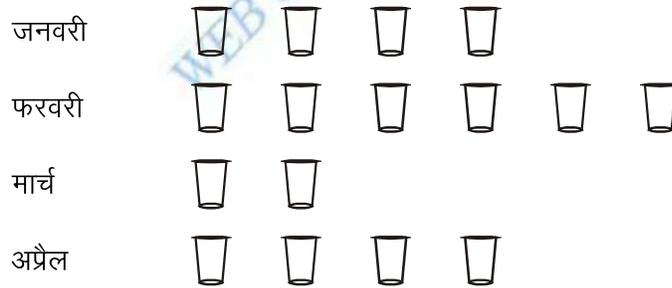
हम अपने आसपास प्रायः समाचार पत्रों, पत्रिकाओं और दूरदर्शन पर कई तरह के आँकड़े, तालिकाएँ व आलेख देखते हैं। ये चीजें हमें कुछ जानकारियाँ देते हैं। आप भी अपने आसपास से सूचनाएँ एकत्रित कर अध्ययन कर सकते हैं। आँकड़े एकत्रित करने के पहले हमें यह जानना होगा कि हम क्या अध्ययन करना चाहते हैं जैसे आप जानना चाहते हैं कि आपकी कक्षा के साथियों का औसत वजन क्या है? इसे जानने के लिए कक्षा के साथियों के वजन का आँकड़ा एकत्रित करना पड़ेगा।

आँकड़े क्या बताते हैं? इसे सुस्पष्ट करने के लिए आलेखीय रूप से (graphically) दर्शाते हैं। पिछली कक्षा में विभिन्न प्रकार के आलेख आपने पढ़ा है, आइए उन्हें फिर से देखें—

1. चित्रालेख (Pictograph)

संकेतों का प्रयोग करते हुए, आँकड़ों का चित्रीय निरूपण:

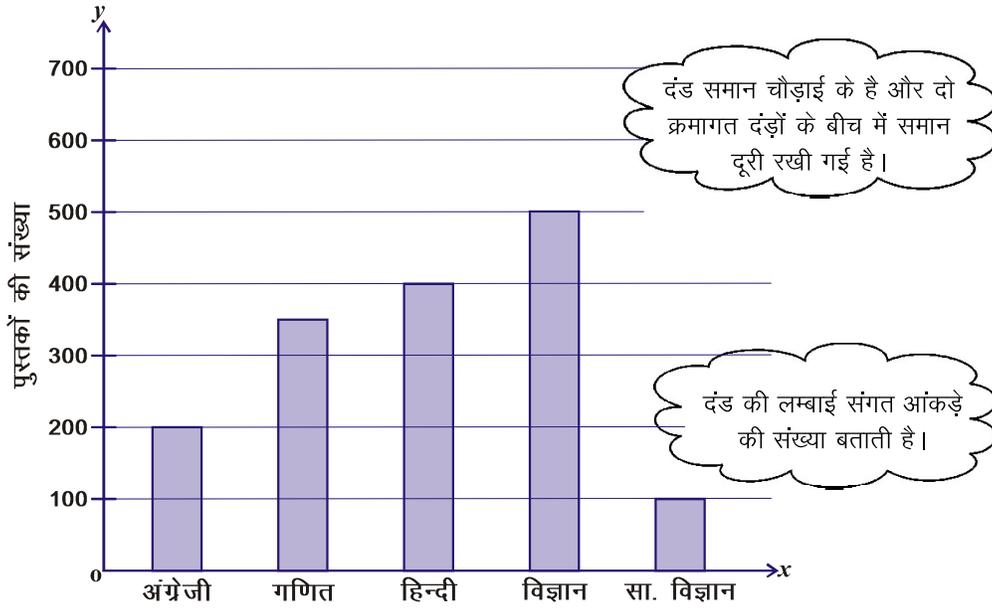
 = एक संकेत 1000 ग्लासों के उत्पादन को बताता है



- मार्च के महीने में कितने ग्लासों का उत्पादन हुआ?
- किन दो महीनों में बराबर उत्पादन हुआ?

2. दंड आलेख (Bar-graphs)

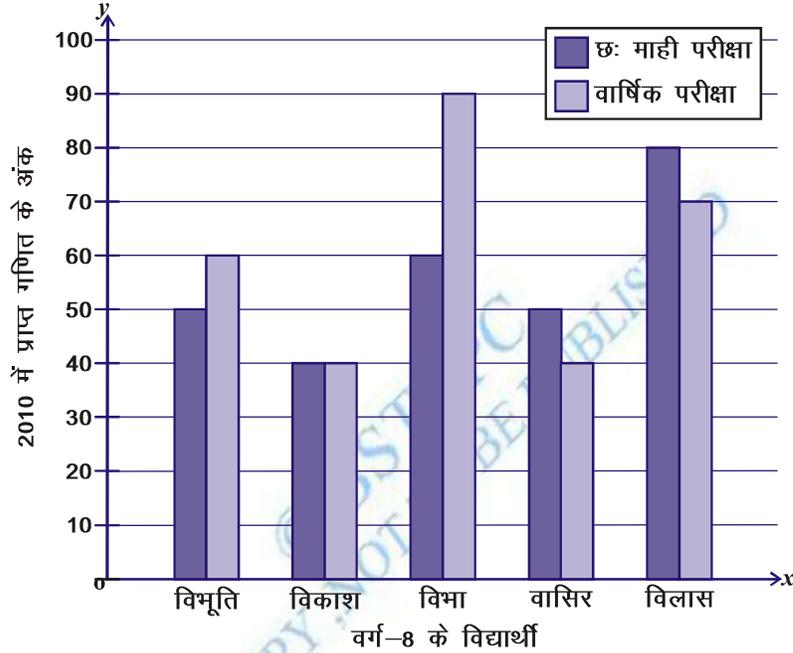
दंड आलेख में प्रत्येक दंड की चौड़ाई समान होती है तथा वे एक-दूसरे से समान दूरी पर होते हैं। दंड की लंबाई (ऊँचाई) पैमाना के अनुसार दिए गए आँकड़े के संगत होती है, इसे हम संगत आंकड़ों के समानुपातिक भी कह सकते हैं।



- सबसे अधिक किस विषय की पुस्तकें हैं और वह कितनी हैं?
- सबसे कम किस विषय की पुस्तकें हैं और वह कितनी हैं?
- पुस्तकालय में कुल कितनी पुस्तकें हैं?
- इस दंड आलेख द्वारा क्या सूचना दी गई है?
- किन दो विषयों की पुस्तकों की संख्या का अन्तर सबसे कम है?

3. दोहरे दंड आलेख (Double Bar Graphs)

जब हमें आँकड़ों के दो समूहों की तुलना करने की आवश्यकता होती है तो दोहरे दंड आलेख (Double Bar Graphs) खींचते हैं।



- दंडों को देखकर अब आप निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिए—
- किस विद्यार्थी का प्रदर्शन छ:माही और वार्षिक में समान रहा?
 - किस विद्यार्थी का प्रदर्शन छ:माही की तुलना में वार्षिक में सबसे अच्छा रहा?
 - कितने विद्यार्थियों ने वार्षिक परीक्षा में 50 से अधिक अंक प्राप्त किए?
 - इस दोहरे दंड आलेख से क्या सूचना दी गई है?
 - छ:माही के अंकों का औसत क्या है? क्या यह वार्षिक परीक्षा के औसत अंक से कम है।

यहाँ छ: माही व वार्षिक परीक्षा के पूर्ण अंकों को 100 माना गया। सोचिए यदि छ: माही परीक्षा 50 अंकों की व वार्षिक 100 अंकों की हो तो आप तुलना कैसे करेंगे?

मैं दोनों परीक्षाओं के अंकों को प्रतिशत में बदल लूंगा।



मैं वार्षिक परीक्षा में प्राप्त अंकों को दो से विभाजित कर लूंगा।

स्वयं करके देखिए

दी गई सूचनाओं को दर्शाने के लिए अलग-अलग आलेख खींचिए।

1.	वर्ष	2007	2008	2009	2010	2011
	पुस्तकालय के लिए खरीदे गए पुस्तक	190	160	180	150	200
2.	गांव का नाम	बड़ी पहाड़ी	आशा नगर	मंसूर नगर		
	पुरुषों की संख्या	2000	1500	1900		
	स्त्रियों की संख्या	1800	1500	2000		
3.	विषय	हिन्दी	अंग्रेजी	गणित	विज्ञान	सामाजिक विज्ञान
	हेमू द्वारा प्राप्त अंक	50	40	80	70	48
4.	8 सर्वश्रेष्ठ क्रिकेट टीमों द्वारा ODI में जीतने का प्रतिशत					
	टीम	चैंपियन ट्राफी से वर्ल्ड कप 2006 तक			2007 में पिछले 10 ODI	
	दक्षिण अफ्रीका	75%			78%	
	ऑस्ट्रेलिया	61%			40%	
	श्रीलंका	54%			38%	
	न्यूजीलैण्ड	47%			50%	
	इंग्लैण्ड	46%			50%	
	पाकिस्तान	45%			44%	
	वेस्टइंडीज	44%			30%	
	भारत	43%			56%	

4.2 आँकड़ों का संगठन (Organising Data)

आइए, एक कक्षा में हुई गणित की परीक्षा का परिणाम देखें:

28, 28, 28, 8, 10, 38, 28, 28, 15, 1,
28, 29, 18, 20, 36, 36, 10, 28, 15, 8

इस उदाहरण में प्रत्येक संख्या एक अवलोकन (Observation) है। इस प्रकार एकत्रित अवलोकनों के समूह को **यथा प्राप्त आँकड़े (Raw data)** कहते हैं। अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिए हमें यथा प्राप्त-आँकड़ों को क्रमबद्ध (आरोही या अवरोही) रूप में व्यवस्थित करने की आवश्यकता होती है। यथा,

38, 36, 36, 29, 28, 28, 28, 28, 28, 28,
28, 20, 18, 15, 15, 10, 10, 8, 8, 1

यहाँ अधिकतम प्राप्तांक और न्यूनतम प्राप्तांक का अन्तर कितना है?

यह अंतर $38 - 1 = 37$ है। यही अंतर (37) उपरोक्त आँकड़ों का परिसर (Range) है। परिसर के कम या अधिक होने पर हमें आँकड़ों के फैलाव का पता चलता है।

कौन प्राप्तांक सबसे अधिक बार प्राप्त किया गया और कौनसा प्राप्तांक सबसे कम बार प्राप्त किया गया?

इसके लिए मिलान-चिह्नों (Tally Marks) का प्रयोग करते हुए, निम्न सारणी बनाते हैं—

सारणी – 4.1

प्राप्तांक	मिलान-चिह्न	कुल बार
38		1
36		2
29		1
28		7
20		1
18		1
15		2
10		2
8		2
1		1
	योग	20

प्रत्येक प्राप्तांक के सामने लिखी मिलान चिह्नों की संख्या से हमें उस प्राप्तांक को प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या का पता चलता है। यह संख्या उस प्राप्तांक की बारम्बारता (Frequency) कहलाती है। किसी प्रविष्टि की बारम्बारता वह संख्या है, जितनी बार वह प्रविष्टि आँकड़ों में आती है।

सारणी-4.1 में प्राप्तांक 28 की बारम्बारता 7 है तथा प्राप्तांक 10 की बारम्बारता 2 है। उपरोक्त रूप से बनाई गई सारणी **बारम्बारता बंटन सारणी (Frequency Distribution Table)** कहलाती है। इससे पता चलता है कि एक प्रविष्टि कितनी बार आई है।

सारणी-4.1 की सूचनाओं को अपनी कॉपी पर दंड आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

4.3 आँकड़ों का वर्गीकरण (Classification of Data)

कभी-कभी हमें ऐसे आँकड़ें प्राप्त होते हैं जिनमें विविधता आधिक होती है, जैसे- किसी कक्षा के 30 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों पर विचार कीजिए-

11, 13, 7, 8, 5, 17, 20, 3, 14, 11,
8, 1, 13, 8, 10, 18, 14, 5, 4, 13,
4, 9, 12, 11, 12, 16, 20, 13, 18, 12

यदि हम प्रत्येक प्रेक्षण (प्राप्तांक) के लिए एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाएं, तो वह बहुत लंबी होगी। अतः हम सुविधा के लिए प्रेक्षणों के कुछ समूह या वर्ग बनाते हैं, जैसे 0-4, 4-8, 8-12 इत्यादि तथा प्रत्येक समूह या वर्ग में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या के आधार पर एक बारम्बारता बंटन (Frequency Distribution) प्राप्त करते हैं। इस प्रकार उपरोक्त आँकड़ों के लिए, वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी निम्नवत हो सकती है:

सारणी – 4.2

वर्ग अन्तराल	मिलान चिह्न	बारम्बारता
0 – 4		2
4 – 8		5
8 – 12		8
12 – 16		9
16 – 20		4
20 – 24		2
	कुल	30

उपरोक्त सारणी में 30 छात्रों के प्राप्तांक को पांच वर्गों (0-4, 4-8 इत्यादि) में विभाजित करके सभी प्रेक्षणों (Observations) को सम्मिलित कर लिया गया है। इसमें प्रत्येक समूह को **वर्ग अन्तराल** (Class Interval) तथा संक्षेप में एक वर्ग (Class) भी कहते हैं।

जब आंकड़ों को इस रूप में लिखा जाता है, तब वे **वर्गीकृत आंकड़े** (Grouped Data) कहे जाते हैं तथा इस प्रकार प्राप्त बंटन को **वर्गीकृत बारम्बारता बंटन** (Grouped Frequency Distribution) कहते हैं। इससे अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है, जैसे;

1. 7 विद्यार्थियों ने 0 और 8 के बीच अंक प्राप्त किए हैं।
2. अधिकांश विद्यार्थियों ने 8 और 16 के बीच अंक प्राप्त किए हैं।
3. 20 अंकों की परीक्षा में 6 विद्यार्थियों ने 16 से 20 अंक प्राप्त किए हैं।
4. इन आंकड़ों का बहुलक वर्ग 12-16 है।

ध्यान दीजिए की प्रेक्षण 4 दोनों ही वर्गों 0-4 और 4-8 में सम्मिलित है। इसी प्रकार प्रेक्षण 8, 12, 16, 20 दो-दो वर्गों में सम्मिलित है। परन्तु कोई भी प्रेक्षण एक साथ दोनों वर्गों में शामिल नहीं हो सकता। इससे बचने के लिए हम यह परिपाटी अपनाते हैं, उभयनिष्ठ प्रेक्षण उच्चतर वर्ग में सम्मिलित करते हैं। अर्थात् प्रेक्षण 4 वर्ग अन्तराल 4-8 में सम्मिलित है (0-4 में नहीं) इसी प्रकार 8 वर्ग अन्तराल 8-12 में सम्मिलित है (4-8 में नहीं)।

यहां प्रत्येक वर्ग को निश्चित करने के लिए दो संख्याएँ हैं, जैसे वर्ग अन्तराल 4-8 में 4 और 8 वर्ग सीमाएँ हैं, जिसमें 4 वर्ग की **निम्न वर्ग सीमा** (Lower Class Limit) तथा 8 वर्ग की **उच्च वर्ग सीमा** (Upper Class Limit) कहलाती है। क्या आप वर्ग अन्तराल 16-20 में उच्च वर्ग सीमा तथा निम्न वर्ग सीमा बता सकते हैं?

किसी भी वर्ग अंतराल की दोनों सीमाओं के अन्तर को **वर्ग माप** (Class Size) या **वर्ग चौड़ाई** (Class Width) कहते हैं। यहां वर्ग अन्तराल 4-8 का वर्ग साइज 4 है। वर्ग अंतराल 8-12 और 12-16 का वर्ग साइज क्या है?

स्वयं करके देखिए

नीचे दिए गए बारम्बारता बंटन सारणी का अध्ययन कीजिए और उनके नीचे दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

वर्ग अंतराल (रुपयों में दैनिक आय)	बारम्बारता (श्रमिकों की संख्या)
75 – 100	45
100 – 125	25
125 – 150	55
150 – 175	125
175 – 200	140
200 – 225	55
225 – 250	35
250 – 275	50
275 – 300	20
योग	550

- वर्ग अंतरालों की माप क्या है?
 - वर्ग अन्तराल 225 – 250 की उच्च सीमा क्या है?
 - किस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक है?
 - किन दो वर्गों की बारम्बारता समान है।
- कक्षा-8 के 32 छात्रों की वार्षिक बचत (रुपयों) में इस प्रकार है:

38, 42, 40, 35, 72, 59, 80, 84, 73, 65, 38, 60, 58, 38, 54, 71, 83, 45, 38, 80, 27, 57, 61, 41, 76, 40, 39, 50, 44, 77, 53, 49

 - वर्ग अन्तराल 30–40 (40 सम्मिलित नहीं) आदि लेकर एक बारम्बारता सारणी बनाइए।
 - वर्ग अन्तराल 20–30 की वर्ग सीमाएँ क्या हैं?
 - वर्ग अन्तराल का वर्ग साइज क्या हैं?

4.3.1 आयत चित्र – आँकड़ों का आलेखीय निरूपण (Histogram - Graphical Representation of Data)

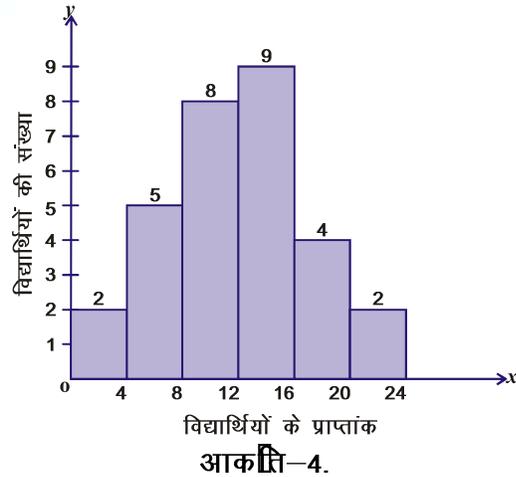
आइए, 30 विद्यार्थियों द्वारा गणित टेस्ट में प्राप्त किए अंकों के वर्गीकृत बारम्बारता बंटन पर विचार करें (सारणी-4.3)

सारणी – 4.3

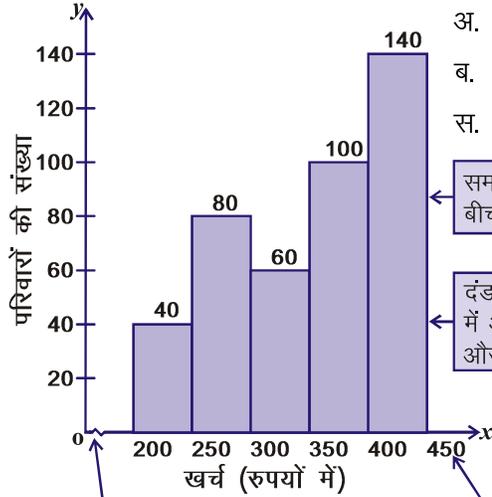
वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
0 – 4	2
4 – 8	5
8 – 12	8
12 – 16	9
16 – 20	4
20 – 24	2
योग	30

आकृति-4.1 में उपरोक्त बारम्बारता बंटन सारणी को आलेख के रूप में दिखाया गया है।

क्या यह आलेख उन दंड आलेखों से अलग है, जो आपने कक्षा-7 में खींचे थे? स्पष्टतः यहां दंडों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं है, क्योंकि वर्ग-अंतरालों के बीच में कोई रिक्तता नहीं है। दूसरे क्षैतिज अक्ष पर वर्ग अंतरालों (प्रेक्षणों के समूहों) को दिखाया गया है तथा दंड की लम्बाई वर्ग अंतराल की बारम्बारता दर्शाती है। आँकड़ों का इस प्रकार आलेखीय निरूपण एक आयत चित्र (Histogram) कहलाता है। अर्थात् आयत चित्र एक ऊर्ध्वाधर दण्ड आलेख होता है, जिसमें विभिन्न दण्डों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं होता। आइए, एक और आयत चित्र देखें।



इस आयत चित्र के दंडों से हम बता सकते हैं कि—



- कितने परिवारों का खर्च न्यूनतम है?
- कितने परिवारों का खर्च अधिकतम है?
- 350 रुपये से कम खर्च वाले परिवार कितने हैं?

समान चौड़ाई वाले दंड जिनके बीच में कोई रिक्तता नहीं है।

दंड की ऊँचाई एक विशिष्ट समूह या वर्ग में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या दर्शाती है और यही उस वर्ग की बारम्बारता है।

टेढ़ी-मेढ़ी रेखा ~ क्षैतिज अक्ष के अनुदिश यह बताती है कि 0 से 200 तक की संख्याएँ इसी रेखा पर है परन्तु दर्शाई नहीं गई हैं।

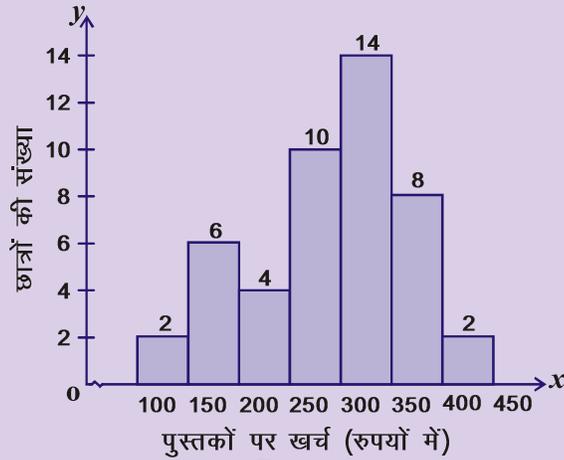
परिसर को समान अंतरालों में बाँटा गया है। संलग्न आरेख में समान वर्ग अन्तराल 50 है।

आकृति-4.2

स्वयं करके देखिए

आयत चित्र (आकृति-4.3) को देखिए और नीचे लिखे प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

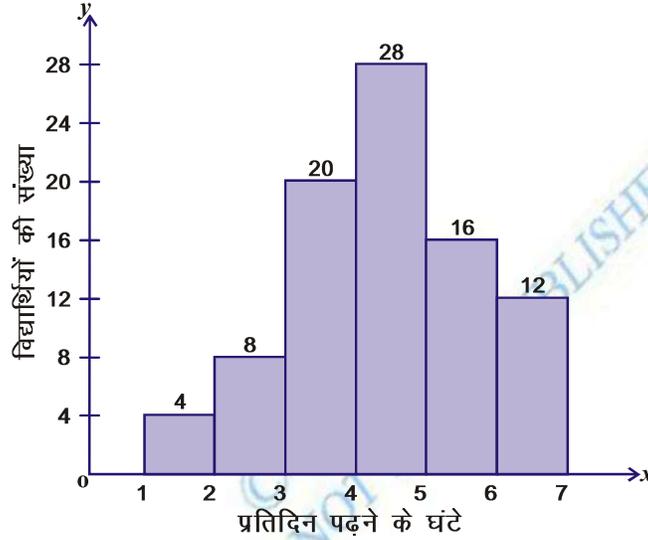
- इस आयत चित्र द्वारा क्या सूचना दी जा रही है?
- किस वर्ग में अधिकतम छात्र हैं?
- कितने छात्रों का खर्च 300 या उससे अधिक है?
- वर्ग साईज क्या है?
- क्या इस आरेख से 100 रुपये से कम खर्च वाले छात्र की संख्या पता चलता है?



आकृति - 4.3

प्रश्नावली – 4.1

1. अवकाश के दिनों में कक्षा-8 के विद्यार्थियों द्वारा प्रतिदिन पढ़ने के समय (घंटों में), दिए हुए आलेख में दर्शाए गए हैं:



निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

- अ. अधिकतम विद्यार्थियों ने कितने घंटों तक पढ़ा?
 - ब. 5 घंटों से कम समय तक कितने विद्यार्थियों ने पढ़ा?
 - स. कुल कितने विद्यार्थियों ने अवकाश के दिनों में भी पढ़ा?
 - द. किस वर्ग अन्तराल की बारम्बारता अधिकतम है?
2. अपनी कक्षा के सभी छात्रों के जूते या चप्पलों के माप एकत्रित कीजिए। उन्हें निम्न तालिका में भर कर एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।

जूतों की माप	मिलान चिह्न	बारम्बारता
5 नम्बर		
6 नम्बर		
7 नम्बर		
8 नम्बर		

3. ककड़िया गाँव के 27 मकानों के एक माह का बिजली बिल रुपयों में निम्नलिखित है:
324, 700, 617, 400, 356, 365, 435, 548, 780, 570, 312, 584, 506, 736, 378,
685, 630, 674, 754, 776, 596, 745, 763, 422, 580, 565, 570
वर्ग अन्तराल 300–400 आदि लेकर एक बारम्बारता सारणी बनाइए।
4. प्रश्न-3 में दिए आँकड़ों से प्राप्त सारणी के लिए एक आयत चित्र बनाइए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—
- किस समूह में बिजली उपभोक्ता की संख्या सबसे अधिक है।
 - कितने बिजली उपभोक्ता 500 रुपये या उससे अधिक बिल जमा करते हैं।
 - कितने उपभोक्ता 400 रुपये से कम का बिल जमा करते हैं?
 - वर्ग अन्तराल 400–500 की उच्च सीमा एवं निम्न सीमा क्या है?
 - आलेख में कितने वर्ग अन्तराल हैं?
5. राजू अपने घर के कपड़ों को रंगों के आधार पर अलग करके इस प्रकार अंकित करता है— उजला (W) लाल (R) काला (B) पीला (Y) अन्य रंग (O)। बनाई गई सूची निम्न रूप में है—

R R O W R B Y R B W W O O R B Y Y O W R
B Y Y B R R O W W R W O O R Y W B Y

मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए। इसे प्रदर्शित करने के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

6. अपनी कक्षा के छात्रों से यह जानकारी प्राप्त कीजिए कि वह घर पर पिछले दिन कितने समय पढ़े। इन आँकड़ों को निम्न वर्गीकृत बारम्बारता सारणी भरिए।

समय (मिनट में)	मिलान चिह्न	बारम्बारता
0 – 30		
30 – 60		
60 – 90		
90 – 120		
120 – 150		
180 – 210		
210 – 240		

उपरोक्त आँकड़ों का एक आयत चित्र बनाइए।

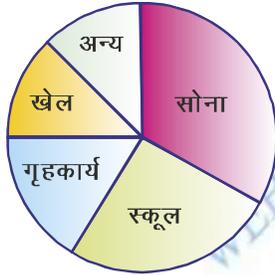
7. निम्नलिखित में से किस प्रकार के आँकड़ों को दर्शाने के लिए आप एक आयत चित्र का प्रयोग करेंगे?
- घर के विभिन्न अनाजों की मात्रा
 - किसी विद्यालय के सभी विद्यार्थियों की ऊँचाई
 - 5 कंपनियों द्वारा निर्मित टेलीविजनों की संख्या
 - एक व्यस्त चौराहे पर प्रातः 8.00 बजे से दोपहर 2 बजे तक गुजरने वाली वाहनों की संख्या।
 - आपके वर्ग के सभी छात्रों का घर से विद्यालय की दूरी। (मीटर में) प्रत्येक के लिए कारण भी दीजिए।

4.4 वृत्ति आलेख (Pie Chart)

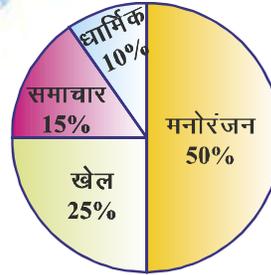
नीचे वृत्तीय रूप में निरूपित आंकड़े हैं, उन्हें ध्यान से देखें :

एक दिन में एक बच्चे द्वारा विभिन्न कार्यों में व्यतीत किया गया समय

टी.वी. पर विभिन्न कार्यक्रमों को देखने वालों की संख्या



आकृति-4.5 (i)



आकृति-4.5 (ii)

क्या आप बता सकते हैं कि

- किस कार्य में बच्चे का सबसे अधिक समय व्यतीत होता है।
- किस कार्यक्रम को देखने वालों की संख्या सबसे कम।

आपने उपरोक्त प्रश्नों का हल कैसे ढूँढ़ा?

आप जानते हैं कि किसी वृत्त के केन्द्र पर बने कोणों का योग 360° होता है। आकृति 4.5 (i) में सोने का क्षेत्र केन्द्र पर सबसे बड़ा कोण बना रहा है जबकि आकृति 4.5 (ii) में धार्मिक कार्यक्रम का क्षेत्र केन्द्र पर सबसे छोटा कोण बना रहा है। यहां सम्पूर्ण वृत्त को त्रिज्यखंडों

(Sectors) में विभाजित किया गया है। प्रत्येक त्रिज्या खंड का आकार (Size) उसके द्वारा निरूपित सूचना के समानुपाती होता है। इस प्रकार के निरूपण **वृत्ति आलेख** (Circle Graphs) या **पाई चार्ट** (Pie Chart) कहलाते हैं।

4.4.1 पाई चार्टों का खींचना

आकृति-4.5 (i) निम्न आंकड़ों का वृत्तीय रूप में निरूपण है :

एक दिन में एक बच्चे द्वारा व्यतीत किया गया समय

कार्य	सोना	स्कूल	गृहकार्य	खेल	अन्य
समय घंटे में	8	6	4	3	3

आइए इन आंकड़ों को एक पाई चार्ट में निरूपित करने के चरणों को समझें:

चरण-1. सबसे पहले सभी प्रेक्षणों का योग करते हैं।

$$\text{यहां } 8 + 6 + 4 + 3 + 3 = 24 \text{ है।}$$

सोचिए यदि प्रेक्षणों की कुल इकाई 24 हैं तो आप 24 में से $8 = \frac{8}{24}$ को किस तरह से वृत्त में निरूपित कर सकते हैं?

चरण-2. प्रत्येक प्रेक्षण (सूचना) को निरूपित करने वाले वृत्त का भाग (सम्पूर्ण का भाग) ज्ञात करते हैं।

जैसे- स्कूल के समय का सम्पूर्ण में भाग (Part)

$$= \frac{\text{स्कूल के घंटों की संख्या}}{\text{सम्पूर्ण दिन}} = \frac{6 \text{ घंटे}}{24 \text{ घंटे}} = \frac{1}{4}$$

अतः स्कूल के घंटों को पूरे वृत्त के $\frac{1}{4}$ वें भाग में खींचा जायेगा।

क्या आप अन्य कार्यों के भाग ज्ञात कर सकते हैं? सभी क्रियाकलापों की भिन्नो (भागों) को जोड़िए। क्या आपको योग एक प्राप्त होता है?



वृत्त के $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, आदि हिस्से करना तो सरल है। सोचिए $\frac{1}{6}$ या $\frac{1}{10}$ आदि हिस्से करने हो तो क्या तरीका काम में लिया जा सकता है?

चरण-3. सम्पूर्ण केन्द्रीय कोण (360°) का प्रत्येक कार्य के लिए कोणिय माप ज्ञात करते हैं। जैसा कि सारणी में दिखाया गया है।

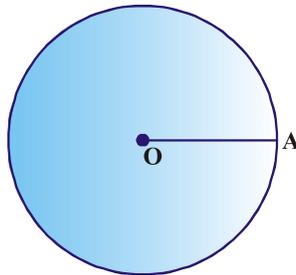
सारणी - 4.4

कार्य	कार्य के घंटे	सम्पूर्ण का भाग	360° का भाग
सोना	8	$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$	360° का $\frac{1}{3} = 120^\circ$
स्कूल	6	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	360° का $\frac{1}{4} = 90^\circ$
गृहकार्य	4	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$	360° का $\frac{1}{6} = 60^\circ$
खेल	3	$\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$	360° का $\frac{1}{8} = 45^\circ$
अन्य	3	$\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$	360° का $\frac{1}{8} = 45^\circ$

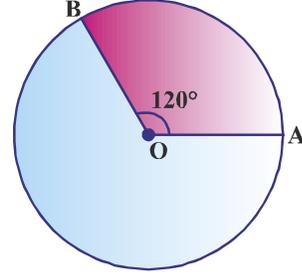


$\frac{1}{10}$ के लिए कोणिय माप क्या होगा? सोचिए।

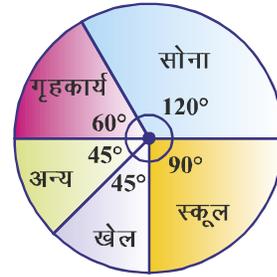
चरण-4. किसी सुविधाजनक त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसका केन्द्र (O) और एक त्रिज्या (O A) अंकित कीजिए।



चरण-5. सोने के घंटे के त्रिज्या खंड का कोण 120° है। चाँद का प्रयोग करके $\angle AOB = 120^\circ$ खींचिए।

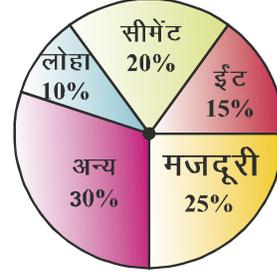


चरण-6. बचे हुए त्रिज्याखंडों के कोणों को इसी प्रकार चाँद से अंकित कीजिए। सम्पूर्ण वृत्त विभिन्न त्रिज्याखंडों में बंट जायेगा।



उदाहरण-1. संलग्न पाई चार्ट (आकृति-4.7) एक मकान के बनाने में विभिन्न मदों में खर्च को दर्शाता है।

- किस मद में व्यय सबसे अधिक है?
- किन दो मदों का व्यय कुल व्यय का आधा है?
- यदि ईंट का खर्च 30,000 रुपये हैं तो लोहे पर खर्च क्या है?



आकृति 4.7

- हल :**
- अन्य मद का व्यय सबसे अधिक है।
 - सीमेंट और अन्य का व्यय कुल व्यय का आधा है।
 - \therefore 15% निरूपित करता है 30000 रु.

$$\therefore 1\% \text{ निरूपित करेगा } \frac{30000}{15}$$

$$\text{अतः } 10\% \text{ निरूपित करेगा } \frac{30000}{15} \times 10 = 20000 \text{ रु.}$$

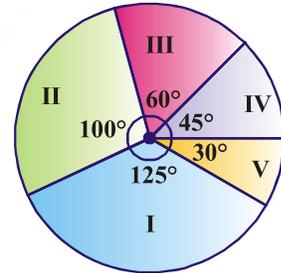
उदाहरण-2. एक विशेष दिन एक विद्यालय में छात्रों की उपस्थिति निम्न प्रकार है :

वर्ग	I	II	III	IV	V
छात्रों की संख्या	75	60	36	27	18

इन आँकड़ों के लिए एक पाई चार्ट खींचिए

हल : हम प्रत्येक त्रिज्यखंड का केन्द्रीय कोण ज्ञात करते हैं। यहां कुल छात्र 216 है। इससे हमें निम्न सारणी प्राप्त होती है।

वर्ग	छात्रों की संख्या	केन्द्रीय कोण
I	75	$\left(\frac{75}{216} \times 360^\circ\right) = 125^\circ$
II	60	$\left(\frac{60}{216} \times 360^\circ\right) = 100^\circ$
III	36	$\left(\frac{36}{216} \times 360^\circ\right) = 60^\circ$
IV	27	$\left(\frac{27}{216} \times 360^\circ\right) = 45^\circ$
V	18	$\left(\frac{18}{216} \times 360^\circ\right) = 30^\circ$



आकृति 4.8

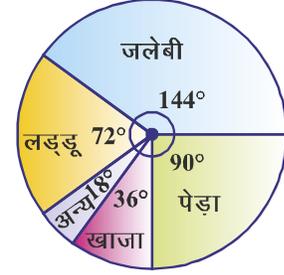
उदाहरण-3. किसी विद्यालय के विद्यार्थियों द्वारा पसंद किए जाने वाली मिठाईयां नीचे दी गईं।

मिठाई	जलेबी	लड्डू	पेडा	खाजा	अन्य
विद्यार्थियों का प्रतिशत	40%	20%	25%	10%	5%

इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट के रूप में निरूपित करें।

हल : यहाँ कुल प्रतिशत = 100 है। इससे निम्न सारणी प्राप्त होती है :

मिठाई	विद्यार्थियों का प्रतिशत	केन्द्रीय कोण
जलेबी	40%	$\frac{40}{100} \times 360^\circ = 144^\circ$
लड्डू	20%	$\frac{20}{100} \times 360^\circ = 72^\circ$
पेडा	25%	$\frac{25}{100} \times 360^\circ = 90^\circ$
खाजा	10%	$\frac{10}{100} \times 360^\circ = 36^\circ$
अन्य	5%	$\frac{5}{100} \times 360^\circ = 18^\circ$



स्वयं करके देखिए

1. नीचे दिए आंकड़ों के लिए एक पाई चार्ट खींचिए:

एक बच्चे द्वारा एक रविवार में व्यतीत किया गया समय इस प्रकार है:

टेलीविजन देखना	–	3 घंटे
साथियों के साथ खेलना	–	2 घंटे
गृह कार्य	–	6 घंटे
अन्य कार्य	–	3 घंटे
सोना	–	8 घंटे
सफाई	–	2 घंटे

2. अपने पाँच साथियों के परिवार में सदस्यों की संख्या को लिखें और उसे पाई चार्ट द्वारा दर्शाएँ।

3. अपने परिवार के एक माह का कुल आय पता करें तथा विभिन्न मदों पर खर्च की एक तालिका बनाएँ और उसे पाई चार्ट द्वारा दर्शाएँ।

प्रश्नावली – 4.2

1. किसी विद्यार्थी के छोटी सी पुस्तकालय में विभिन्न विषयों की पुस्तकें नीचे दी गई हैं। इन आंकड़ों को एक पाई चार्ट द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

विषय	विज्ञान	गणित	अंग्रेजी	हिन्दी	सा. अध्ययन	योग
पुस्तकें	40	12	9	7	4	72

2. एक परिवार की मासिक आय 12000 रु. है। परिवार की मासिक खर्च निम्नानुसार है, दिए गये आंकड़ों से पाई चार्ट बनाइए।

मद	मकान किराया	भोजन	शिक्षा	मनोरंजन	स्वास्थ्य
खर्च (रु. में)	1500	6000	2000	1000	1500

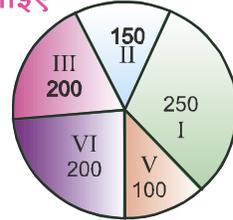
3. विभूति द्वारा गणित की छः माहों की मासिक जांच परीक्षा के प्राप्तांक निम्नानुसार है—

महीनों के नाम	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर
प्राप्तांक 100 में	40	45	65	35	55	60

उपरोक्त आंकड़ों से पाई चार्ट बनाइए।

4. एक विद्यालय के कक्षा I से V तक के 900 विद्यार्थियों की संख्या लेखाचित्रानुसार है। लेखाचित्र की सहायता से बताइए—

- कक्षा-I में कुल कितने विद्यार्थी हैं?
- सबसे कम विद्यार्थी किस कक्षा में है?
- कक्षा-III से कक्षा-V तक कुल कितने विद्यार्थी हैं?



4.5 संयोग और प्रायिकता (Chance & Probability)

कभी-कभी ऐसा होता है कि पिछले कई दिनों से आपके घर पीने का पानी सुबह 6 से 7.30 बजे तक आता है पर जब आप किसी दिन देर से 7 बजे उठकर पानी भरने को जाते हैं तो वह जल्द ही बंद हो जाता है।

प्रत्येक व्यक्ति जानना चाहता है कि एक विशेष रेलगाड़ी सही समय से चलती है परन्तु जिस दिन आप सही समय पर पहुँचते हैं, उसी दिन वह देरी से आती है।



आपको उपरोक्त प्रकार की अनेक स्थितियों का सामना करना पड़ता है जहाँ आप संयोग (chance) का सहारा लेकर कार्य करना चाहते हैं परन्तु वह उस प्रकार से नहीं होता जैसा आप चाहते हैं। क्या आप ऐसे कुछ और उदाहरण दे सकते हैं?

जब कोई व्यक्ति लॉटरी की टिकट खरीदता है तो उसके जीतने व हारने का संयोग बराबर नहीं होता, अतः जीतने की संभावना बहुत कम व हारने की संभावना बहुत अधिक होती है, परन्तु यहाँ हम कुछ ऐसे प्रयोगों की बात करेंगे जिनके परिणामों के घटित होने का संयोग बराबर है।

कोई परिणाम प्राप्त करना

विक्की और बबलू पासे से खेल रहे थे, तभी विक्की ने बबलू से कहा कि पासे में छः सबसे कम बार आता है। आप क्या सोचते हैं? क्या ऐसा ही होता है?...
..

यह जानने के लिए कि क्या 6 अन्य अंकों 1, 2, 3, 4, 5 से वास्तव में कम आता है अथवा नहीं। विक्की और बबलू ने 25–25 बार पासे को फेंके और अंकों की एक बारम्बारता सारणी बनाई।

बबलू द्वारा 25 बार फेंके पासे के लिए सारणी :



1	
2	
3	
4	
5	
6	

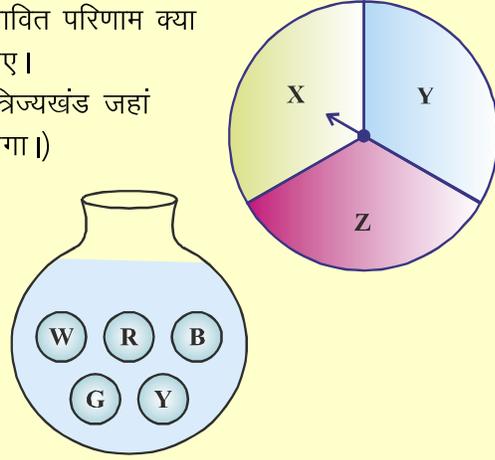
आप भी पासा लेकर देखें कि 25 बार फेंकने पर आपको प्राप्त अंकों की सारणी कैसी बनती है?

अतः यह जरूरी नहीं है कि कोई अंक कम आये अथवा ज्यादा। पासे पर किसी भी अंक के आने की संभावना बराबर है।

इस प्रकार का प्रयोग एक यादृच्छ या यादृच्छिक प्रयोग (random experiement) कहलाता है। 1, 2, 3, 4, 5 व 6 इस प्रयोग के छः परिणाम है।

स्वयं करके देखिए

1. यदि आप एक मोटर साइकिल चलाना प्रारम्भ करें, तो संभव परिणाम क्या है?
2. जब एक पासे (die) को फेंका जाता है, तो संभव छह परिणाम क्या हैं?
3. जब आप पहिए को घुमाएंगे, तो संभावित परिणाम क्या होंगे (आकृति—)? इनकी सूची बनाइए।
(यहां परिणाम का अर्थ है कि वह त्रिज्यखंड जहां पर सूचक (pointer) घुमाने पर रुकेगा।)
4. आपके पास एक थैला है और उसमें भिन्न-भिन्न रंगों की पाँच एक जैसी गेंदें हैं (आकृति—)। आप बिना देखें इसमें से एक गेंद निकालते हैं। प्राप्त होने वाले परिणामों को लिखिए।



सम संभावित परिणाम (Equally Likely Outcomes)

अपनी कक्षा के बच्चों को 3-4 की टोलियों में बांटकर प्रत्येक टोली को एक सिक्का दे दीजिए। कहिए कि वे सिक्के को कई बार उछालें और हर बार नोट करें कि चित आया या पट। प्रत्येक टोली इन आंकड़ों को तालिका 1 में बताए अनुसार दो कॉलम में दर्ज कर सकती है।

चित आने पर गोला (○) और पट आने पर चकोर (□) का निशान लगाया जा सकता है। 15 बार सिक्का उछालने के बाद आप यह देखें कि कौन-सा निशान ज्यादा लंबे समय तक दोहराया जा रहा है। मसलन, क्या लगातार 6 बार चित आया? या, कितना बार एक के चित पट बाद आए? प्रत्येक टोली अपनी-अपनी सबसे लम्बी शृंखला को पहचानकर लिखें।

मसलन, क्या दो पट के बाद एक चित अथवा दो चित के बाद एक पट आता है, या क्या चित और पट लगातार एक के बाद एक आते हैं? या क्या ऐसा कोई पैटर्न है ही नहीं? अब उनसे 15 से कहीं ज्यादा बार सिक्का उछालकर प्रत्येक 10



उछाल के बाद अपने परिणामों को दर्ज करने को कहिए। अब सबसे लम्बी शृंखला कौन सी है? अब क्या कोई पैटर्न है?

आइए अपनी परिणाम शीट (तालिका) को देखें, जहाँ हम उछालों की संख्या में वृद्धि करते जा रहे हैं:

उछालों की संख्या	मिलान चिह्न (H)	चितों की संख्या	मिलान चिह्न (T)	पटों की संख्या
40		22		18
50		23		27
60	28	32
70	33	37
80	38	42
90	44	46

ध्यान दीजिए कि जब आप उछालों की संख्या अधिकाधिक बढ़ाते जाते हैं, तब चितों की संख्या और पटों की संख्या परस्पर अधिकाधिक निकट आते जाते हैं।

ऐसा ही एक पासे के साथ भी हो सकता है, जब उसे एक बड़ी संख्या में फेंका जाता है। छह परिणामों में से प्रत्येक की संख्या परस्पर लगभग बराबर हो जाती है।

ऐसी स्थिति में, हम कह सकते हैं कि प्रयोग के विभिन्न परिणाम **सम संभावित** या **समप्रायिक** (equally likely) है। इसका अर्थ यह है कि सभी में से प्रत्येक परिणाम के आने का संयोग (chance) एक ही है।

संयोग को प्रायिकता से जोड़ना

जब हम एक सिक्का उछालते हैं तो यहाँ चित प्राप्त करने की संभावना 2 परिणामों (चित और पट) में से 1 है अर्थात् $\frac{1}{2}$ है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता (Probability) = $\frac{1}{2}$ है। एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है? यहाँ दोनों ही परिणाम समप्रायिक (equally likely) है।

अब यदि आप एक पासे को फेंके, तो परिणाम क्या प्राप्त होंगे? स्पष्ट है; 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से कोई एक, यहाँ छह समप्रायिक परिणाम हैं। इसमें 3 प्राप्त करने की प्रायिकता होगी—

$$\frac{1}{6} \leftarrow \text{तीन देने वाले परिणामों की संख्या}$$

$$\frac{1}{6} \leftarrow \text{समप्रायिक परिणामों की संख्या}$$

2 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है? संख्या 7 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी? **घटनाओं के रूप में परिणाम**— प्रत्येक प्रयोग के प्रत्येक परिणाम के संग्रह से एक घटना बनती है। उदाहरणार्थ एक सिक्के को उछालने के प्रयोग में एक चित प्राप्त करना एक घटना है तथा पट प्राप्त करना भी एक घटना है। एक पासे को फेंकने की स्थिति में परिणामों 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से प्रत्येक परिणाम प्राप्त करना एक घटना है।

एक सम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

यह है : $\frac{3}{6} \leftarrow$ उन परिणामों की संख्या जो घटना बनाते हैं (जो कि 2, 4 व 6)

$$\frac{3}{6} \leftarrow \text{समप्रायिक परिणामों की संख्या}$$

उदाहरण : एक थैले में 5 काली गेंदें और 2 लाल गेंदें हैं। (ये गेंदें रंग के अलावा सभी प्रकार से समान हैं)। थैले के अंदर से बिना देखे एक गेंद निकाली जाती है। एक लाल गेंद प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है? क्या यह एक काली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता से अधिक है या कम?

हल : यहाँ घटना के कुल $5 + 2 = 7$ परिणाम हैं। लाल गेंद प्राप्त करने के लिए 2 परिणाम हैं। (क्यों?)

अतः, लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{2}{7}$ है।

इसी प्रकार, काली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{5}{7}$ है। (क्यों?)

अतः, लाल गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता काली गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता से कम है।

प्रश्नावली — 4.3

1. दो सिक्कों को एक साथ—साथ उछाला जाता है। एक सिक्के के चित आने की क्या प्रायिकता है।
2. एक थैले में 6 सफेद, 11 लाल और 7 पीले रंग की गेंदें हैं। उस थैले में से एक पीले गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

3. अच्छी तरह से फेटी हुई 52 ताशों की एक गड्डी में से 1 इक्का प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी?
4. जब एक पासे को फेंका जाता है तब निम्नलिखित प्रत्येक घटना से प्राप्त होने वाले प्रायिकताएँ को लिखिए :
 - (i) (a) एक अभाज्य संख्या (b) एक अभाज्य संख्या नहीं
 - (ii) (a) 4 से बड़ी एक संख्या (b) 4 से बड़ी संख्या नहीं
 - (iii) एक सम संख्या
5. 12 अलग-अलग पर्चियों पर 1 से 12 तक संख्याएँ लिखी हुई हैं (एक पर्ची पर एक संख्या) उन्हें एक डब्बे में रखकर अच्छी तरह मिला दिया जाता है। डब्बे के अन्दर से बिना देखे एक पर्ची निकाली जाती है। निम्नलिखित की प्रायिकता क्या होगी—
 - (i) संख्या 5 प्राप्त करना (ii) संख्या 13 प्राप्त करना
 - (iii) संख्या 1 से 12 में कोई एक प्राप्त करना।

